第22卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 22, No. 4
1996年 7月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1996

研究简报

关于系统相似性的研究

高立群 张嗣瀛
（东北大学自控系 沈阳 110006）

关键词: 系统相似，反馈状态解耦，反馈相似化。

1 相似系统

相似是反映系统结构的一个重要特征，但目前国内外关于系统相似的研究却几乎空白，本文针对非线性控制系统提出如下定义。

定义 对于分别定义在n维光滑流形N和M上的两个光滑系统

$$S_1':\ \dot{\boldsymbol{z}}_1=\boldsymbol{f}_1'(\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{u}_1'),\ \boldsymbol{z}_1\in N,\ \boldsymbol{u}_1'\in R^m,$$
$$\boldsymbol{y}_1'=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}_1),\quad \boldsymbol{y}_1'\in R^r,$$
$$S_2:\ \dot{\boldsymbol{x}}_2=\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{u}_2),\ \boldsymbol{x}_2\in M,\ \boldsymbol{u}_2\in R^m,$$
$$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{x}_2),\ \boldsymbol{y}_2\in R^r.$$

1）如果存在同胚映射 $T:N\to M$, $T\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{x}_1$; $Q:R^m\to R^m$, $Q\boldsymbol{u}_1'=\boldsymbol{u}_1$，使得$S_1'$映为

$$S_1:\ \dot{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{u}_1)=\varphi(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{u}_1),$$
$$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1).$$

在 $\boldsymbol{x}_0\in M$ 的邻域 $O(\boldsymbol{x}_0)$ 内对于 $\forall\boldsymbol{u}_1\in R^m$ 有 $\varphi(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{u}_1)\in C^\infty(O(\boldsymbol{x}_0))$；当 $\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_1)\neq 0$ 时，$\varphi(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_1)\neq 0$，$|\varphi(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_1)|<\infty$，则称系统$S_1$与$S_2$在 $\boldsymbol{x}_0\in M$ 处状态相似，记作 $S_1\overset{\boldsymbol{x}_0}{\underset{s}{\sim}}S_2$；也称系统$S_1'$在 $\boldsymbol{z}_0=T^{-1}\boldsymbol{x}_0\in N$ 处与系统S_2在$\boldsymbol{x}_0$处状态相似。若对 $\forall\boldsymbol{x}\in M$, $S_1\overset{\boldsymbol{x}}{\underset{s}{\sim}}S_2$，则称 $S_1(S_1')$ 状态相似于S_2，记作 $S_1(S_1')\underset{s}{\sim}S_2$.

2）如果 $S_1\overset{\boldsymbol{x}_0}{\underset{s}{\sim}}S_2$，且在 $O(\boldsymbol{x}_0)$ 内

$$Sp\{dh_1^j|j=1,\cdots,r\}=Sp\{dh_2^j|j=1,\cdots,r\},$$

则称S_1与S_2在 $\boldsymbol{x}_0\in M$ 处相似，记作 $S_1\overset{\boldsymbol{x}_0}{\sim}S_2$；也称$S_1'$在 $\boldsymbol{z}_0=T^{-1}\boldsymbol{x}_0\in N$ 处与S_2在$\boldsymbol{x}_0$处相似。若对 $\forall\boldsymbol{x}\in M$, $S_1\sim S_2$，则称 $S_1(S_1')$ 相似于S_2，记作 $S_1(S_1')\sim S_2$.

本文于1993年4月19日收到

系统状态相似和相似均是等价关系。一个复杂的系统可以和一个相应比较简单的系统相似。如果能寻找出相似系统在各类性质之间的内在联系，将有可能把较为复杂的系统的研究转化为简单系统的研究。

定义中状态相似系统具有鲜明的几何意义：设：S_1 和 S_2 分别描述流形 M 上的两个运动体系，如果 $S_1 \underset{s}{\overset{x}{\sim}} S_2$，那么当 $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$ 时，在 $\boldsymbol{x}_0$ 点处两个运动的速度方向相同。

为讨论问题方便，并不失一般性，在后面我们认为两个相似系统定义在同一流形 M 上。

2 主要结果

下面涉及的概念均引自文献 [1, 2]。

命题 1 如果 $S_1 \underset{s}{\overset{x_0}{\sim}} S_2$，且 $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \varphi(\boldsymbol{x})$，则 S_1 和 S_2 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处具有相同的弱能控性和强可接近性。

命题 2 设 $S_1 \overset{x_0}{\sim} S_2$，则在 $\boldsymbol{x}_0$ 处 S_1 弱可观测等价于 S_2 弱可观测。

命题 1，2 可根据定义和熟知的有关定理直接加以验证。

根据前面的定义，两个相似的仿射非线性系统可进一步表述为

$$S_3: \quad \dot{\boldsymbol{x}}_1 = \varphi(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_1) + \sum_{j-1}^{m} \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x}_1)u_1^j,$$

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1),$$

$$S_4: \quad \dot{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_2) + \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x}_2)u_2^j,$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{x}_2).$$

其中，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in M$，$\boldsymbol{u}_i = [u_i^1, \cdots, u_i^m]^{\mathrm{T}} \in R^m$，$\boldsymbol{y}_i \in R^r$，$i = 1, 2$；$\boldsymbol{h}_1$，$\boldsymbol{h}_2, \varphi$，$\boldsymbol{g}_j \in C^\infty(M)$。

命题 3 设 $\boldsymbol{x}_0$ 为 S_3 和 S_4 的非奇异点，记 $G = Sp\{\boldsymbol{g}_j | j = 1, \cdots, m\}$，则 S_3 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处存在反馈状态解耦的充要条件为 S_4 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处存在反馈状态解耦。

证。设 S_4 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可以反馈状态解耦，则存在 K 个同时可积的弱 (f, g) 不变分布 $\Delta_1, \cdots, {}^{\gamma}\Delta$

$$G = G \cap \Delta_1 + \cdots + G \cap \Delta_k.$$

可验证 Δ_i 关于 S_3 也是弱 (f, g) 不变的，从而得证。

命题 4 设 S_3 和 S_4 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点非奇异，$L\boldsymbol{g}_j\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$，$j = 1, \cdots, \boldsymbol{m}$，则 S_3 在 $O(\boldsymbol{x}_0)$ 内可状态方程反馈线性化的充要条件为 S_4 在 $O(\boldsymbol{x}_0)$ 内可状态方程反馈线性化。

证。设 S_4 在 $O(\boldsymbol{x}_0)$ 内可状态方程反馈线性化，则存在一族在 $\boldsymbol{x}_0$ 点非奇异的对合分布

$$D_i = Sp\{ad_{f_2}^s \boldsymbol{g}_j | j = 1, \cdots, m, \ s \leqslant i - 1\}, \ i = 1, \cdots, n,$$

$$\dim D_n(\boldsymbol{x}_0) = n.$$

令 $\overline{D}_i = Sp\{ad_{\varphi f_2}^s \boldsymbol{g}_j | j = 1, \cdots, m, \ s \leqslant i - 1\}$，$i = 1, \cdots, n$，则利用归纳法可以证得

$\overline{D}_i = D_i$，$i = 1, \cdots, n$，$x \in O(x_0)$。从而 S_3 也可以依分布 D_i 进行状态方程线性化。

命题 5 对于M上的两个仿射非线性系统

$$S_5:\ \dot{x}_1 = f_1(x_1) + \sum_{j=1}^{m} g_1^j(x_1) u_1^j,$$

$$S_6:\ \dot{x}_2 = f_2(x_2) + \sum_{j=1}^{m} g_2^j(x_2) u_2^j.$$

如果在 $O(x_0)$ 内

$$S_p\{g_1^j | j = 1, \cdots, m\} = S_p\{g_2^j | j = 1, \cdots, m\},$$

且

$$f_2(x) \in S_p\{f_1, g_1^j | j = 1, \cdots, m\},\ f_2(x) \bar{\in} S_p\{g_1^j | j = 1, \cdots, m\},$$

或

$$f_1(x) \in S_p\{f_2, g_2^j | j = 1, \cdots, m\},\ f_1(x) \bar{\in} S_p\{g_2^j | j = 1, \cdots, m\},$$

则 S_5 和 S_6 可反馈状态相似化。

此命题可通过选取反馈进行构造性证明。

参 考 文 献

[1] 程代展. 非线性系统的几何理论. 科学出版社，1988.
[2] Isidori A. Nonlinear control systems. Springer-Verlag World Publishing Corp., 1989

RESEARCH ON SIMILAR OF SYSTEMS

GAO LIQUN ZHANG SIYING
(Dept. of Automatic Control, Northeastern Univ., Shenyang 110006)

Key words: Similarity of systems, decompusition of state equation with feedback, similarization with state feedback.