第22卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 22, No. 4
1996年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1996

短 文

区域极点约束下线性离散系统的 Riccati 鲁棒控制[1)]

王子栋 孙翔 郭治
(南京理工大学自动控制系 南京 210094)

摘 要

讨论区域极点约束下,含结构参数扰动的不确定线性离散系统的鲁棒控制问题,即设计一鲁棒状态反馈控制器,使线性离散系统在可允许的参数扰动下,闭环矩阵极点始终位于一预先给定的圆形区域中,从而闭环系统具有期望的动态性能. 上述控制目的可通过求解一含参数的代数离散 Riccati 方程达到.

关键词: 离散系统,鲁棒控制,极点配置,代数 Riccati 方程.

1 引言

定常系统的动态性能直接受其系统矩阵极点所处位置的影响,因而区域极点配置问题得到广泛的研究[1]. 又由于复杂工业过程与控制对象的建模误差不可避免,所以研究不确定系统的鲁棒区域极点配置问题成为极具实际意义的工作. 在相关文献中,大部分[2-4]只是研究不确定系统的稳定鲁棒性,在少量涉及控制器设计的文献中[5],均假设标称系统是稳定的,从而限制了其应用前景. 本文给出的方法克服了如上缺点.

2 问题的描述

考虑如下不确定线性定常离散时间系统

$$x(k+1)=(A+\Delta A)x(k)+Bu(k), \tag{1}$$

其中状态 $x\in R^n$,控制输入 $u\in R^m$. A, B 为适维常数矩阵且 B 列满秩. ΔA 表示系统结构扰动,且假定具有结构

$$\Delta A = MFN. \tag{2}$$

这里 $F\in R^{i\times j}$ 为未知的定常矩阵函数. M,N 为适维已知矩阵,F 满足关系式

1) 高等学校博士点学科专项科研基金及南京理工大学科研发展基金资助项目.
本文于1994年12月2日收到

$$F^TF \leqslant I.$$

当取状态反馈控制 $u(k) = Gx(k)$ 时,闭环系统成为

$$x(k+1) = (A_c + \Delta A)x(k), \quad A_c = A + BG. \tag{3}$$

考虑复平面上,单位圆(圆心在原点)内,圆心位于 $\alpha + j0$ 且半径为 r 的圆形区域,并将其记为 $D(\alpha,r)$,则本文的目的可表述为: 设计控制器 G, 使得在所有可允许(即满足式(2))的参数扰动下,闭环矩阵 $A_c + \Delta A$ 的极点均位于给定圆盘 $D(\alpha,r)$中,即

$$\Lambda(A_c + \Delta A) \subset D(\alpha,r).$$

3 主要结果及证明

定理 1. 考虑代数矩阵方程

$$-\alpha(A_c + \Delta A)^TP - \alpha P(A_c + \Delta A) + (A_c + \Delta A)^TP(A_c + \Delta A) + (\alpha^2 - r^2)P = -Q, \tag{4}$$

其中 Q 为任意正定阵,则 $\Lambda(A_c + \Delta A) \subset D(\alpha,r)$,当且仅当(4)式存在正定解 $P > 0$.

证明: 只需对文献[1]中引理 1 的证明稍加修改即可.

定理 2. 令 $A_{c\alpha} = A_c - \alpha I$,则对于满足

$$\varepsilon M^TPM < I \tag{5}$$

的任意正数 ε 及正定阵 P,有

$$(A_{c\alpha} + \Delta A)^TP(A_{c\alpha} + \Delta A) \leqslant A_{c\alpha}^T\left[P + PM\left(\frac{1}{\varepsilon}I - M^TPM\right)^{-1}M^TP\right]A_{c\alpha} + \frac{1}{\varepsilon}N^TN. \tag{6}$$

证明. 令 $R = A_{c\alpha}^TPM\left(\frac{1}{\varepsilon}I - M^TPM\right)^{-\frac{1}{2}} - N^TF^T\left(\frac{1}{\varepsilon}I - M^TPM\right)^{\frac{1}{2}}$, 则由 $\Delta A = MFN$ 及 $F^TF \leqslant I$,有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant RR^T &= A_{c\alpha}^TPM\left(\frac{1}{\varepsilon}I - M^TPM\right)^{-1}M^TPA_{c\alpha} - [A_{c\alpha}^TP\Delta A \\ &\quad + \Delta A^TPA_{c\alpha} + \Delta A^TP\Delta A] + \frac{1}{\varepsilon}N^TF^TFN \\ &\leqslant A_{c\alpha}^TPM\left(\frac{1}{\varepsilon}I - M^TPM\right)^{-1}M^TPA_{c\alpha} - [(A_{c\alpha} + \Delta A)^TP \\ &\quad \cdot (A_{c\alpha} + \Delta A) - A_{c\alpha}^TPA_{c\alpha}] + \frac{1}{\varepsilon}N^TN, \end{aligned}$$

从而直接可得(6)式.

定理 3. 考虑闭环系统(3),给定期望极点区域 $D(\alpha,r)$,则若存在正数 ε 及正定阵 P 满足式(5)以及

$$A_{c\alpha}^T\left[P + PM\left(\frac{1}{\varepsilon}I - M^TPM\right)^{-1}M^TP\right]A_{c\alpha} + \frac{1}{\varepsilon}N^TN = r^2P - Q, \tag{7}$$

其中 $Q > 0$ 为任意正定阵,则有 $\Lambda(A_c + \Delta A) \subset D(\alpha,r)$.

证明．定义 $\Pi = A_{c\alpha}^{\mathrm{T}}\left[P + PM\left(\frac{1}{\varepsilon}I - M^{\mathrm{T}}PM\right)^{-1}M^{\mathrm{T}}P\right]A_{c\alpha} + \frac{1}{\varepsilon}N^{\mathrm{T}}N - [A_{c\alpha} + \Delta A]^{\mathrm{T}}P[A_{c\alpha} + \Delta A]$，则由定理2知，$\Pi \geqslant 0$．注意到 $A_{c\alpha} = A_c - \alpha I$，从而(7)式等价于

$$-\alpha(A_c + \Delta A)^{\mathrm{T}}P - \alpha P(A_c + \Delta A) + (A_c + \Delta A)^{\mathrm{T}}P(A_c + \Delta A) + (\alpha^2 - r^2)P = -(Q + \Pi). \tag{8}$$

因 $Q + \Pi > 0$，则定理3由定理1直接可得．

为继续讨论控制器的具体设计方法，令

$$\hat{A} = (A - \alpha I)/r,\ \hat{B} = B/r,\ S = \left(\frac{1}{\varepsilon}N^{\mathrm{T}}N + Q\right)\Big/ r^2, \tag{9}$$

$$X = \hat{B}^{\mathrm{T}}P\hat{B} + \hat{B}^{\mathrm{T}}PM\left(\frac{1}{\varepsilon}I - M^{\mathrm{T}}PM\right)^{-1}M^{\mathrm{T}}P\hat{B}, \tag{10}$$

$$Y = \hat{B}^{\mathrm{T}}P\hat{A} + \hat{B}^{\mathrm{T}}PM\left(\frac{1}{\varepsilon}I - M^{\mathrm{T}}PM\right)^{-1}M^{\mathrm{T}}P\hat{A}. \tag{11}$$

定理4． 考虑含参数扰动的闭环系统(3)，给定期望圆形极点区域 $D(\alpha, r)$，则控制律

$$G = -X^{-1}Y \tag{12}$$

使得闭环极点在可允许的参数扰动下，位于期望区域 $D(\alpha, r)$中．其中 $\hat{A}, \hat{B}$ 由(9)式定义，正数 ε 及正定阵 P 满足 $\varepsilon M^{\mathrm{T}}PM < I$ 及代数矩阵方程

$$P = \hat{A}^{\mathrm{T}}P\hat{A} + \hat{A}^{\mathrm{T}}PM\left(\frac{1}{\varepsilon}I - M^{\mathrm{T}}PM\right)^{-1}M^{\mathrm{T}}P\hat{A} + S - Y^{\mathrm{T}}X^{-1}Y. \tag{13}$$

这里 S 由(9)式定义，X, Y 分别由(10)，(11)两式定义．

证明．注意到 B 列满秩，从而 X^{-1}有意义．据 $\hat{A}, \hat{B}, S$ 的定义，(7)式可重写为

$$P = (\hat{A} + \hat{B}G)^{\mathrm{T}}\left[P + PM\left(\frac{1}{\varepsilon}I - M^{\mathrm{T}}PM\right)^{-1}M^{\mathrm{T}}P\right](\hat{A} + \hat{B}G) + S. \tag{14}$$

将(12)式代入(14)式中，经适当的整理即可得(13)式，从而由定理3可得定理4．

说明．1)当不考虑参数扰动时，方程(13)将退化为标准的离散时间 Riccati 方程，此时控制器 G 可使得闭环系统 $\boldsymbol{x}(k+1) = (\hat{A} + \hat{B}G)\boldsymbol{x}(k)$ 的二次性能指标极小；[1] 2)广义 Riccati 方程(13)可利用逐次逼近法求解；3)本文推导过程中无需标称系统渐近稳定的假设．

4 结语

本文利用一含参数的代数 Riccati 方程，给出了不确定离散时间系统鲁棒区域极点配置问题的解，推广了文献[1]的结果．本文所述方法及结果已推广到静、动态输出反馈的情形．

参考文献

[1] Furuta K, Kim S B. Pole assignment in a specified disk. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1987,

32(5): 423—427.

[2] Lee C H, Li T H S, Kung F C. D-stability analysis for discrete systems with a time delay. *Syst. Contr. Lett.*, 1992, **19**(13): 213—219.

[3] Tsay S C, Fong I K, Kuo T S. D-stability analysis for discrete optimal regulator. *Control-Theory and Advanced Technology*, 1990, **6**: 237—246.

[4] Chou J H. Pole-assignment robustness in a specified disk. *Syst. Contr. Lett.*, 1991, **16**: 41—44.

[5] Juang Y T, Chen K H. Robust pole-assignment of linear dynamic systems. *Control-Theory and Advanced Technology*, 1989, **5**(1): 67—74.

AN ALGEBRAIC RICCATI EQUATION APPROACH TO ROBUST CONTROL FOR LINEAR DISCRETE-TIME SYSTEMS WITH REGIONAL POLE CONSTRAINTS

Wang Zidong Sun Xiang, Guo Zhi

(Dept. of Automatic Control, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, *P. R. China)*

Abstract

This paper considers the robust control problem for uncertain linear discrete-time systems with regional constraints. The problem we address is to design the robust state feedback controller such that the closed-loop poles are placed within a specified disk for all admissible perturbations, and hence the closed-loop systems will possess the desired dynamical performance. It is shown that the control object can be achieved by solving an algebraic Riccati equation with uncertain parameters.

Key words: Discrete-time systems, robust control, pole assignment, algebraic Riccati equations.