



# 混合不确定性系统的鲁棒镇定 及性能设计<sup>1)</sup>

黄 一

(中科院系统所 北京 100080)

田玉平 冯纯伯

(东南大学自动化所 南京 210018)

## 摘 要

采用双回路控制方法讨论具有混合不确定性系统的鲁棒镇定及性能设计问题, 其内环控制器可改善对象特性, 从而使整个双回路闭环系统具有鲁棒稳定性.

**关键词:** 混合不确定性对象, 鲁棒镇定, 鲁棒性能.

## 1 问题描述

考虑图 1 是具有混合不确定性的闭环系统, 其中,  $G_0(s, p)$  为含参数不确定性对象,  $\Delta \in RH_\infty$  为未建模动态,  $W_2(s)$  为已知权函数,  $C(s)$  为待求控制器. 设系统灵敏度函数  $S_p$ 、辅助灵敏度函数  $T_p$  和受扰灵敏度函数分别为

$$S_p = \frac{1}{1 + G_0(s, p)C(s)}, \quad T_p = \frac{G_0(s, p)C(s)}{1 + G_0(s, p)C(s)},$$
$$S_{p\Delta}(s) = \frac{1}{1 + (1 + W_2(s)\Delta)G_0(s, p)C(s)}. \quad (1)$$

控制器的设计要求为

1) 鲁棒稳定性要求:

$$(1 + G_0(s, p)C(s))^{-1} \in RH_\infty, \|W_2(s)T_p(s, p)\|_\infty < 1, \forall p \in P. \quad (2)$$

2) 鲁棒性能要求:

$$\|W_1(s)S_{p\Delta}(s, p)\|_\infty < 1, \forall p \in P. \quad (3)$$

其中  $W_1(s)$  为权函数, 由设计者根据对系统的性能要求予以选定.

1) 本文由国家自然科学基金资助.  
本文于 1994 年 5 月 16 日收到

指标(2),(3)等价于<sup>[1]</sup>

$$(1 + G_0(s, p)C(s))^{-1} \in RH_\infty, \quad \| |W_1 S_p| + |W_2 T_p| \|_\infty < 1, \quad \forall p \in P. \quad (4)$$

然而,即使在取定  $p = p_0$  时,指标

$$\| |W_1 S_{p_0}| + |W_2 T_{p_0}| \|_\infty < 1 \quad (5)$$

的优化问题从理论上至今还没有解决. 本文针对指标(2),(5)采用双回路控制方法,研究控制器综合问题.

## 2 鲁棒镇定及性能设计

设有严格真系统

$$G_0(s, p) = \frac{g_{0n}(s, p)}{g_{0d}(s, p)}, \quad g_{0n}(s, p) = \sum_{i=0}^n g_{ni}(p)s_i, \quad g_{0d}(s, p) = \sum_{i=0}^m g_{di}(p)s_i, \quad (6)$$

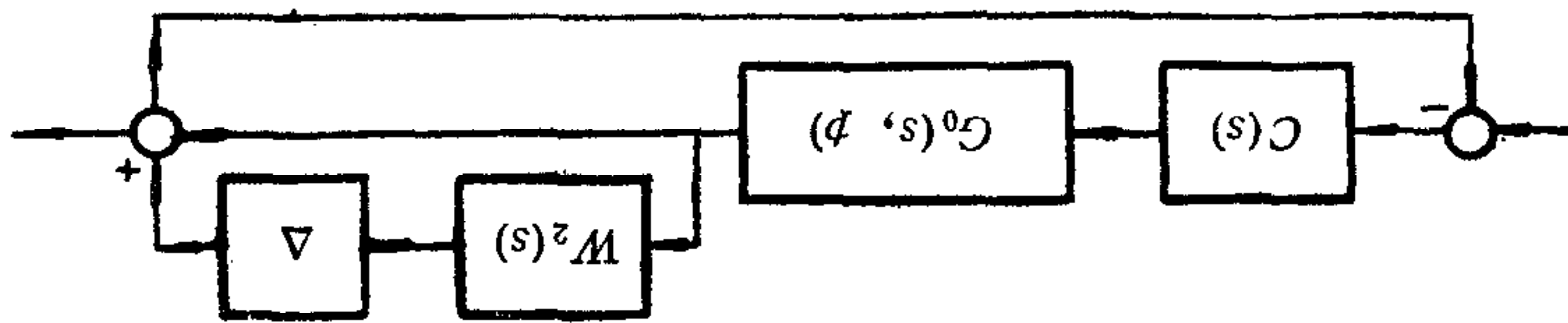


图1 混合不确定性闭环系统

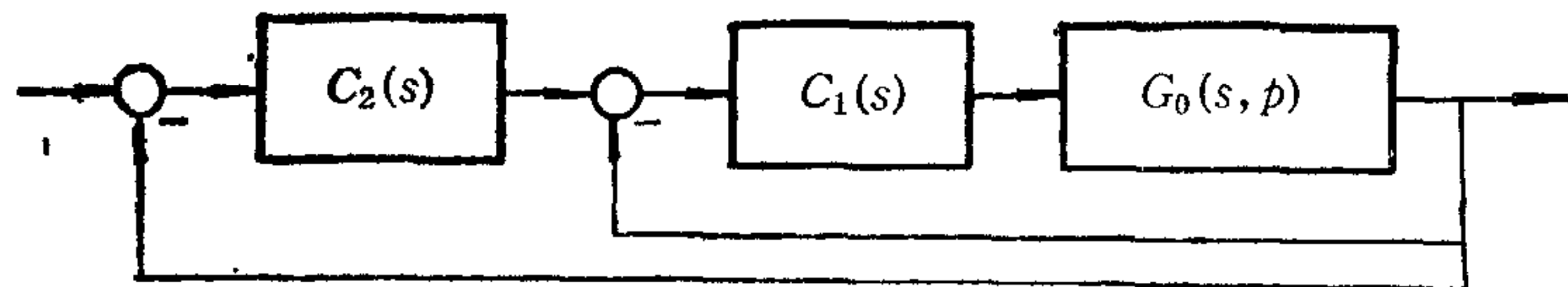


图2 双回路闭环系统

$p \in P \subset R^r$  为不确定参数向量. 假设  $\exists p_0$ , 使  $g_{nn}(p_0) \neq 0$ , 且  $g_{0n}(s, p_0)$  无虚轴上零点. 若  $G_0(s, p)$  可鲁棒镇定, 即存在  $\tilde{C}(s)$  能鲁棒镇定  $G_0(s, p)$ . 但  $\tilde{C}(s)$  却不一定能保证指标(2),(5)的实现. 为了能兼顾指标(2),(5), 采用图2所示双回路控制, 其中

$$C_2(s) \in \Psi, \quad \Psi = \left\{ \frac{\tilde{C}(s) - C_1(s)}{C_1(s)} : C_1(s) \in RH_\infty, C_1^{-1}(s) \in RH_\infty \right\}. \quad (7)$$

**定理1.**  $\forall C_2(s) \in \Psi$ , 图2所示双回路闭环系统具有鲁棒稳定性.

证明. 因为  $G_0(s, p)$  可被控制器  $\tilde{C}(s)$  鲁棒稳定, 即

$$(1 + G_0(s, p)\tilde{C}(s))^{-1} \in RH_\infty, \quad \forall p \in P, \quad (8)$$

则

$$\left( 1 + \frac{\tilde{C}(s) - C_1(s)}{C_1(s)} \cdot \frac{C_1(s)G_0(s, p)}{1 + C_1(s)G_0(s, p)} \right)^{-1} \in RH_\infty, \quad \forall p \in P. \quad (9)$$

即控制器  $C_2(s) \left( = \frac{\tilde{C}(s) - C_1(s)}{C_1(s)} \right)$  必可鲁棒镇定  $G_c \left( = \frac{C_1(s)G_0(s, p)}{1 + C_1(s)G_0(s, p)} \right)$ .  $\square$

采用这种控制结构, 是因为此时系统的灵敏度函数  $S_p$  和辅助灵敏度函数  $T_p$  为

$$S_p = \frac{1 + G_0(s, p)C_1(s)}{1 + G_0(s, p)\tilde{C}(s)}, \quad T_p = \frac{G_0(s, p)(\tilde{C}(s) - C_1(s))}{1 + G_0(s, p)\tilde{C}(s)}. \quad (10)$$

可见内环控制器  $C_1(s)$  可改变对象特性,使得  $C_2(s)$  在鲁棒镇定  $G_0(s, p)$  的同时,指标(2),(5)得以满足.

取  $p = p_0, N(s), M(s)$  为  $G_0(s, p_0)$  的一个稳定有理互质分解,由于  $\frac{\partial T_p}{\partial p_i}$  在高频段的特性

$$\frac{\partial T_p}{\partial p_i} = T_{p_0} \cdot \left( \frac{\partial g_{0n}}{\partial p_i} g_{0d} - \frac{\partial g_{0d}}{\partial p_i} g_{0n} \right) \cdot \left[ \frac{g_{0d}}{1 + \tilde{C}G_0} \right]^2 \cdot \frac{M + N\tilde{C}}{N}, \quad (11)$$

在高频  $\omega > \omega_T$  时,  $\exists a_i \geq 0$  满足

$$\left| \left( \frac{\partial g_{0n}}{\partial p_i} g_{0d} - \frac{\partial g_{0d}}{\partial p_i} g_{0n} \right) \cdot \left[ \frac{g_{0d}}{1 + \tilde{C}G_0} \right]^2 \cdot \frac{M + N\tilde{C}}{N} \right| \leq a_i. \quad (12)$$

这说明  $T_p$  在高频段不会出现大的波动,即

$$|T_p(j\omega)| \leq |T_{p_0}(j\omega)| \left( 1 + \sum_{i=1}^r a_i \max |p_i - p_{i0}| \right), \quad \forall \omega \geq \omega_T. \quad (13)$$

这样可根据指标(5)中的权函数  $W_2(s)$  及  $a_i$  的大小确定权函数  $W_3(s)$

$$|W_3(j\omega)| \geq |W_2(j\omega)| \left( 1 + \sum_{i=1}^r a_i \max |p_i - p_{i0}| \right). \quad (14)$$

于是,按指标

$$\| |W_1(j\omega)S_{p_0}(j\omega)| + |W_3(j\omega)T_{p_0}(j\omega)| \|_{\infty} < 1, \quad \forall \omega \in [0, \infty) \quad (15)$$

的要求确定了  $C_1(s)$  后,指标(2),(5)均得以满足.

指标(15)的一个必要条件为<sup>[1]</sup>

$$\min\{|W_1(j\omega)|, |W_3(j\omega)|\} < 1, \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (16)$$

同时由于系统的未建模动态一般发生在高频段,而对灵敏度函数  $S_p$  的性能要求一般以低频为主,故通常选择  $W_1(s), W_3(s)$  在低频段满足  $|W_1(j\omega)| > 1 > |W_3(j\omega)|$ , 而在高频段则满足  $|W_3(j\omega)| > 1 > |W_1(j\omega)|$ . 对图 2 所示系统,当  $p = p_0$  时

$$S_{p_0}(s) = \tilde{Y}(s)(M(s) + N(s)C_1(s)), \quad T_{p_0}(s) = N(s)(\tilde{X}(s) - \tilde{Y}(s)C_1(s)), \\ \frac{\tilde{X}(s)}{\tilde{Y}(s)} = \tilde{C}(s). \quad (17)$$

记  $\gamma(j\omega) \triangleq |W_1(j\omega)S_{p_0}(j\omega)| + |W_3(j\omega)T_{p_0}(j\omega)|$ , 不难推得

$$\text{当 } |W_3| < 1 \text{ 时, } \left| C_1 + \frac{M}{N} \right| < \frac{r_s}{|N\tilde{Y}|} \implies \gamma < 1, \text{ 其中 } r_s = \frac{1 - |W_3|}{|W_1| + |W_3|}; \quad (18)$$

$$\text{当 } |W_1| < 1 \text{ 时, } \left| C_1 - \frac{\tilde{X}}{\tilde{Y}} \right| < \frac{r_s}{|N\tilde{Y}|} \implies \gamma < 1, \text{ 其中 } r_s = \frac{1 - |W_1|}{|W_1| + |W_3|}. \quad (19)$$

上式说明在低频段上,  $\gamma < 1$  的充分条件是  $C_1(j\omega)$  位于以  $-\frac{M}{N}$  为圆心,  $\frac{r_s}{|N\tilde{Y}|}$  为半径

的圆内,而在高频段上,  $\gamma < 1$  的充分条件是  $C_1(j\omega)$  位于以  $\frac{\tilde{X}}{\tilde{Y}}$  为圆心,  $\frac{r_s}{|N\tilde{Y}|}$  为半径的



圆内.

### 3 控制器实现及设计步骤

根据上节分析,我们采用图 3 所示控制结构,其中  $K(s)$  为低通滤波器且低频为单位增益. 而

$$F(s) = F_1(s) \cdot G'(s), G'(s) = \frac{N(s)}{M'(s)}, M'^{-1}(s) \in RH_\infty, \quad (20)$$

这里  $F_1(s)$  为高通滤波器且高频为单位增益,而  $\frac{M'}{M}$  具有全通特性.

此时指标(2),(5)对应变为

1) 鲁棒稳定性要求

$$\|W_2(s)T'_p(s,p)\|_\infty < 1, \forall p \in P, T'_p = -\frac{G_0 C_1 (C_2 + K)}{1 + C_1 F + C_1 G_0 (C_2 + K)}. \quad (21)$$

根据  $K(s), F(s)$  的滤波特性,在高频段有  $|T'_p| \approx |T_p|$ .

2)  $p = p_0$  时,鲁棒性能要求

$$\|W_1(s)S'_{p_0\Delta}(s)\|_\infty < 1, S'_{p_0\Delta} = \frac{1 + C_1 F + G_0 C_1 K (1 + W_2 \Delta)}{1 + C_1 F + C_1 G_0 (C_2 + K) (1 + W_2 \Delta)}. \quad (22)$$

根据  $K(s), F(s)$  的滤波特性,在低频段和高频段均有  $|S'_{p_0\Delta}| \approx |S_{p_0\Delta}|$ .

于是,按上面通频特性确定的输入输出反馈补偿器可保证按指标(15)设计出控制器  $C_1(s), C_2(s)$  后,图 3 系统满足指标(21),(22).

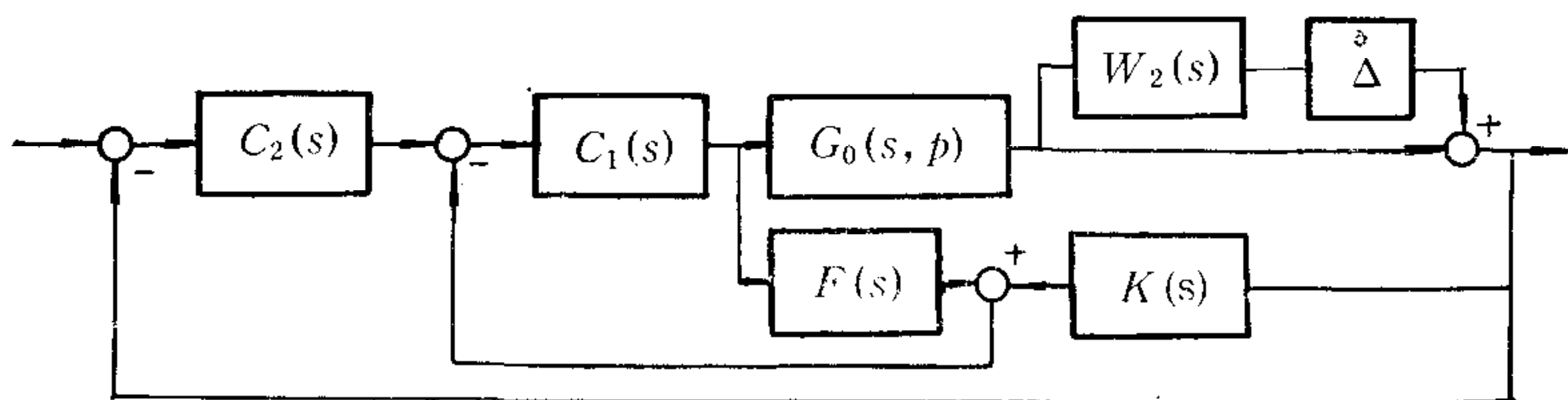


图 3 实现方案

综合上面的结果,对含有混合不确定性系统进行鲁棒镇定及性能设计的一般步骤为

1) 选取  $p_0$ , 使  $g_{nn}(p_0) \neq 0$ , 且  $g_{0n}(s, p_0)$  无虚轴上零点.

2) 求一可鲁棒镇定  $G_0(s, p)$  的控制器  $\tilde{C}(s)$ , 从而确定外环控制器集  $\Psi$ .

3) 根据  $W_2(j\omega)$  及  $a_i$  的大小选取权函数  $W_3(j\omega)$ . 在波特图上整形出一个稳定且具有最小相位的真有理函数  $C_1(j\omega)$ , 使其在低频段位于以  $-\frac{M}{N}$  为圆心, 以  $\frac{r_s}{|\tilde{Y}N|}$  为半径

的区域内, 在高频段位于以  $\frac{\tilde{X}}{\tilde{Y}}$  为圆心, 以  $\frac{r_s}{|\tilde{Y}N|}$  为半径的区域内. 确定控制器  $C_2(s)$ .

4) 根据通频特性选择滤波器  $F(s), K(s)$ .

## 4 设计示例

设有含混合不确定性对象为

$$G_0(s, p) = \frac{p_1}{s + p_2}, \quad p_1 \in [1, 2], \quad p_2 \in [-2, -1], \quad W_2(s) = \frac{(s + 1)(s + 10)}{(s + 100)(0.2s + 10)}.$$

取  $p_{10} = 1.5, p_{20} = -1.5$ .  $W_1(j\omega) = \begin{cases} 10, \omega \leq 1, \\ 0, \omega > 1. \end{cases}$  易知, 控制器  $\tilde{C}(s) = \frac{19.5}{s + 9.5}$  可鲁棒镇定  $G_0(s, p)$ .

选择权函数

$$W_3(s) = \frac{2(s + 1)}{0.3s + 20}, \text{ 设计 } C_1(s) = \frac{0.1s + 1}{s + 1}, \quad C_2(s) = \frac{-s^2 + 175.5s + 100}{(s + 9.5)(s + 10)};$$

选取滤波器

$$F(s) = \frac{1.5(s + 1)}{(s + 100)(s + 1.5)}, \quad K(s) = \frac{150}{(s + 100)(s + 1.5)}.$$

此时系统满足指标(21), (22).

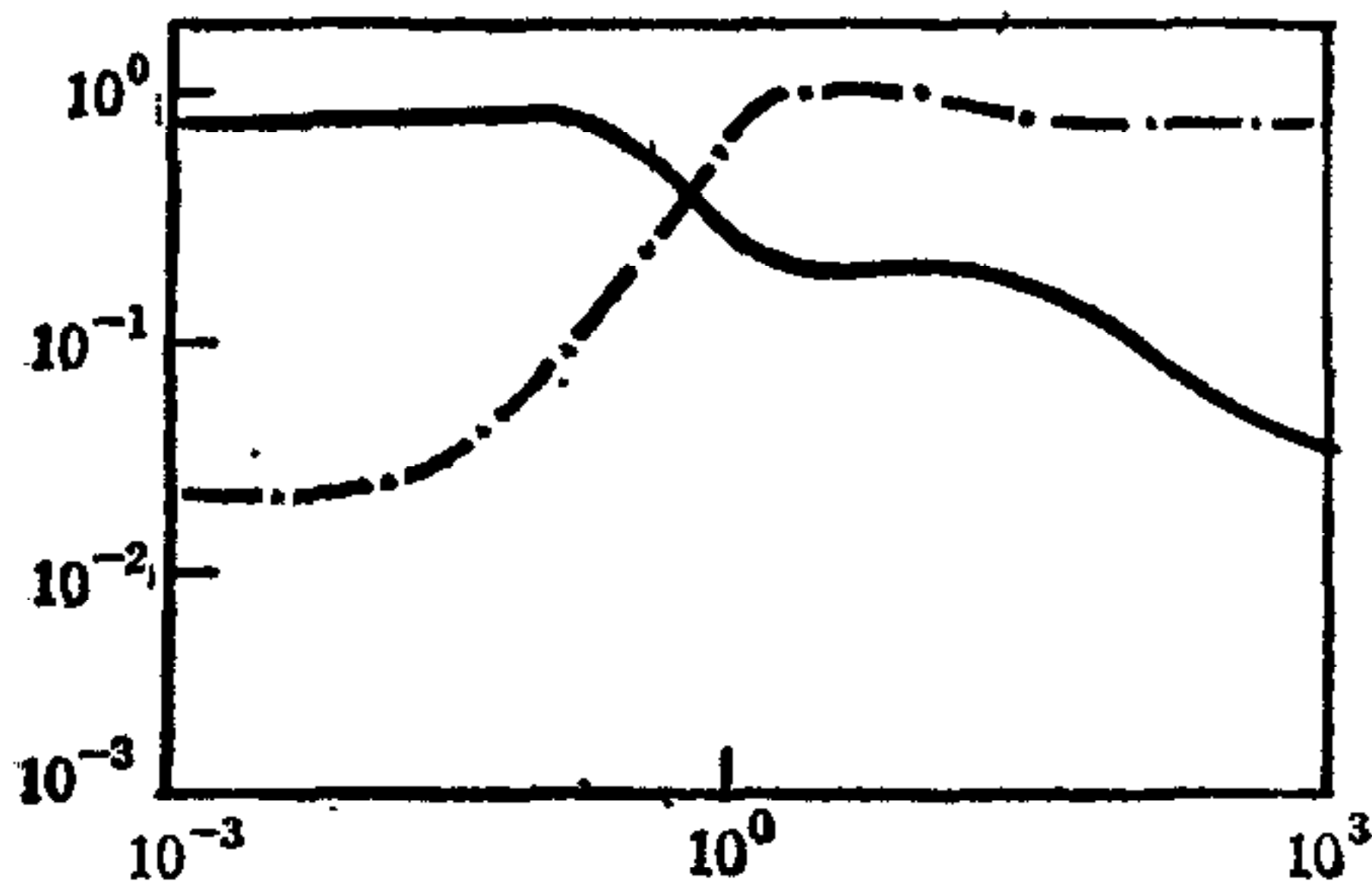


图 4 仿真曲线

图 4 实线所示为  $W_2 T_p'$  的幅频响应上界曲线, 说明系统对参数和未建模动态均具有鲁棒稳定性. 点划线为  $S'_{p_0 \Delta}$  的幅频响应的上界曲线, 说明系统在  $p = p_0$  时对未建模动态还具有鲁棒性能.

## 5 小结

本文针对具有参数和非参数不确定性系统的鲁棒镇定和性能设计问题, 采用了一种双回路控制方法. 这种方法的特点是给出一族可鲁棒镇定含参数不确定性对象的外环控制器集  $\Psi$  (以内环控制器  $C_1(s)$  为参量), 然后选择内环控制器改善对象特性, 使得闭环系统不仅对不确定参数具有鲁棒稳定性, 而且对未建模动态还具有鲁棒稳定性和鲁棒性能.

## 参 考 文 献

- [1] Doyle J C et al. Feedback Control Theory. New York: Macmillan, 1992.

**ROBUST STABILIZATION AND PERFORMANCE  
DESIGN FOR LINEAR SYSTEMS WITH  
PARAMETRIC UNCERTAINTIES AND  
UNMODELED DYNAMICS**

HUANG YI

*(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing 100080)*

TIAN YUPING FENG CHUNBO

*(Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing 210018)*

ABSTRACT

In this paper, the two-loop design method is presented to solve the problem of robust stabilization and performance design for linear systems with parametric uncertainties and unmodeled dynamics. The internal controller can improve the properties of the plant. And the closed loop system will have the robust stability and the robust performance.

**Key words:** Linear systems with parametric uncertainties and unmodeled dynamics, robust stabilization, robust performance.