短文

非线性控制系统线性化与极点配置的神经网络方法[1)]

李银国　张邦礼　曹长修
(重庆大学自动化系　重庆　630044)

摘　要

提出一种同时实现非线性控制系统反馈线性化和极点配置的神经网络方法，并证明了在随机逼近意义下该神经网络控制系统的有效性.

关键词: 非线性系统,线性化,神经网络.

1 引言

反馈线性化技术是通过状态(输出)反馈将复杂的非线性系统变换为完全能控的线性系统,继而可用成熟的线性系统理论,实现非线性系统的分析与综合.

文献[1,2]研究了可全局线性化系统的结构和条件,说明了线性化问题研究的广泛适用性. 在方法上,主要有微分几何方法、逆系统方法、状态变换方法等[2,3]，但均要以系统精确建模为基础. 本文试图用 ANN 方法，为反馈线性化问题的研究另辟蹊径，证明由一个多层前馈型网络 (MFNN) 和两个特殊结构的线性网络所构成的 ANN 控制系统，在一定条件下同时实现线性化和自寻优极点配置,并给出了网络线性逼近的精度分析.

2 神经网络控制系统结构

设系统状态方程为

$$\boldsymbol{x}(t+1)=f[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)]. \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$, $\boldsymbol{u}(t)\in R^m$. 求状态反馈 $\boldsymbol{u}(t)=g[\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{v}(t)](\boldsymbol{v}(t)\in R^l)$, 使反馈系统 $\boldsymbol{x}(t+1)=f[\boldsymbol{x}(t),g(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{v}(t))]$ 成为完全能控线性系统

$$\boldsymbol{x}(t+1)=A\cdot\boldsymbol{x}(t)+B\cdot\boldsymbol{v}(t). \tag{2}$$

这里未用到坐标变换,且状态维数 n 已知[2].进一步对系统(1)作极点配置$\boldsymbol{v}(t)=K\cdot\boldsymbol{x}(t)$,

1) 国家教委博士点基金资助课题.
本文于1994年6月4日收到

得闭环线性系统

$$\boldsymbol{x}(t+1)=A_0\cdot\boldsymbol{x}(t). \tag{3}$$

其中 $A_0=A+BK$. 此时便有反馈控制律

$$u(t)=g[\boldsymbol{x}(t),K\cdot\boldsymbol{x}(t)]=G[\boldsymbol{x}(t)], \tag{4}$$

使非线性系统(1)线性化,并作极点配置.

本文研究目标是,在仅知系统可线性化(如仿射非线性系统)、维数 n 等部分结构信息的条件下,证明可将神经网络用于未知的某反馈控制律(4),且和参考线性系统

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t+1)=J\cdot\hat{\boldsymbol{x}}(t)$$

具有相同的极点.

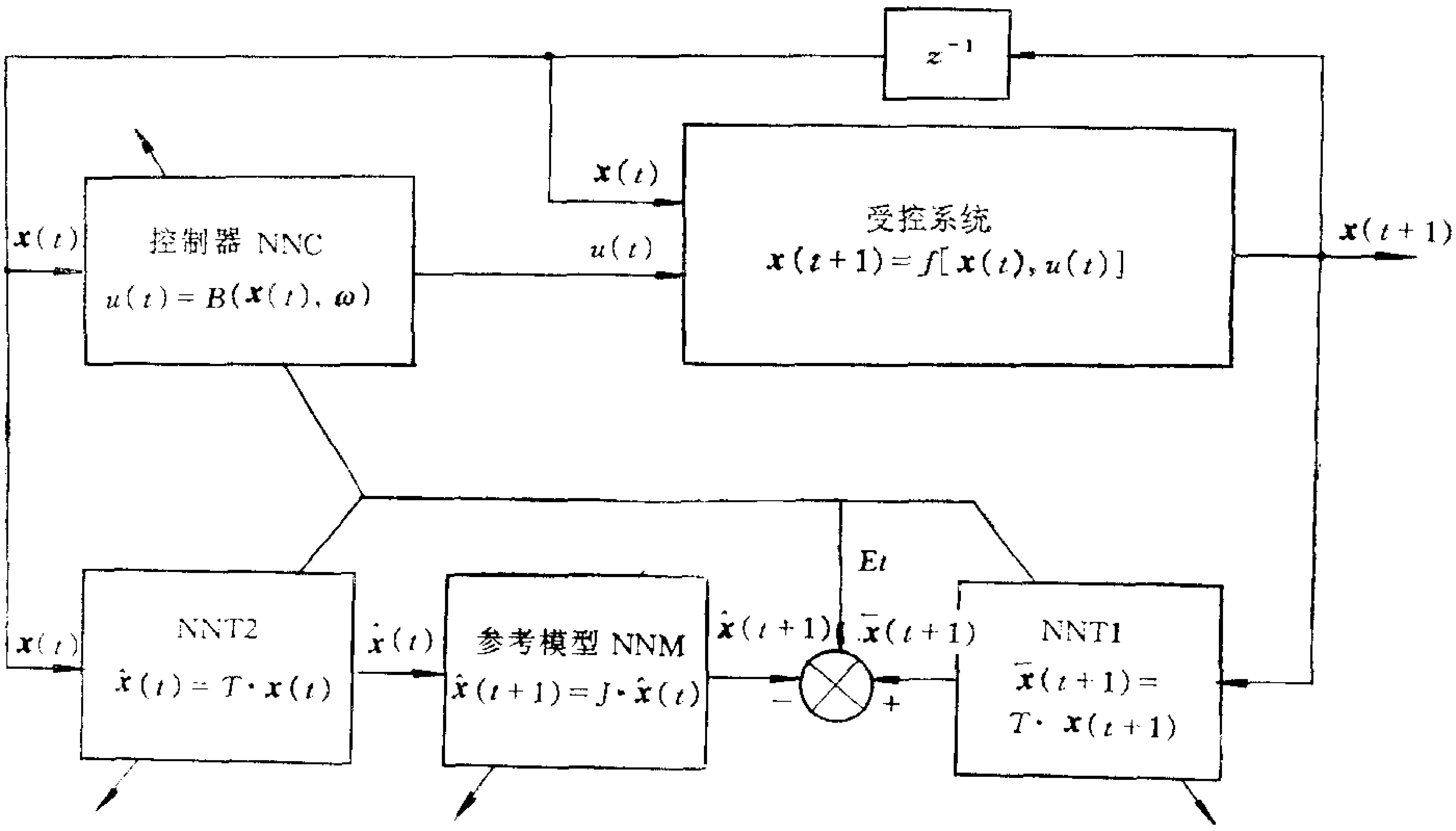

图 1　线性化与极点配置 ANN 控制系统

(上半部分为反馈控制子系统,下半部分为网络学习训练辅助子系统.)

图 1 所示的 ANN 控制系统中各网络的功能如下:

(1) 控制器 NNC 为 MFNN 型网络,权向量为 $\boldsymbol{w}$, 其作用是用网络输出 $B[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{w}]$逼近于 $G[\boldsymbol{x}(t)]$;

(2) 参考模型 NNM 为特殊结构的线性网络,它表示系统 $\hat{\boldsymbol{x}}(t+1)=J\cdot\hat{\boldsymbol{x}}(t)$, 权矩阵为 Jordan 型

$$J=\begin{pmatrix}\sigma_{11}, & \sigma_{12}, & 0, & \cdots, & 0\\ 0, & \sigma_{22}, & \sigma_{23}, & \cdots, & 0\\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & \sigma_{nn}\end{pmatrix}; \tag{5}$$

(3) NNT_1 和 NNT_2 为两个完全相同的线性网络,权矩阵 $T=(t_{ij})_{n\times n}$,其作用是使线性化系统(3)通过状态变换 T 和参考系统趋于一致.

上述 ANN 控制系统的动态方程为

$$\boldsymbol{x}(t+1)=f[\boldsymbol{x}(t),\ B(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{w})], \tag{6}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t+1)=J\cdot T\cdot \boldsymbol{x}(t),\tag{7}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t+1)=T\cdot \boldsymbol{x}(t+1).\tag{8}$$

网络学习训练目标函数

$$E(\boldsymbol{w},J,T)=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N}\sum_{t=0}^{N-1}E_t+\frac{1}{2}\mu\cdot F(J).\tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned}E_t&=\|\bar{\boldsymbol{x}}(t+1)-\hat{\boldsymbol{x}}(t+1)\|^2\\&=\|T\cdot f[\boldsymbol{x}(t),B(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{w})]-J\cdot T\cdot \boldsymbol{x}(t)\|^2;\end{aligned}$$

$$F(J)=\sum_{i=1}^{n}(\sigma_{ii}-\lambda_i)^2.$$

显然,(9)式中第一项体现了受控系统在 LMS 意义下逼近参考系统的基本要求;第二项体现了极点配置到 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的约束条件;而 $\mu>0$ 为罚因子 (penalty parameter).

3 神经网络控制系统性能分析

引理 1. 设 $G(\boldsymbol{x})$ 是紧集 $D\subset R^n$ 上 L^2 可积函数,$\boldsymbol{x}(t)(t=0,1,2,\cdots)$ 是从 D 中随机抽取的一组样本,密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ 有界,则 $\forall\varepsilon>0$,存在权向量 $\boldsymbol{w}'$,使得

$$P\left\{\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1}\|G(\boldsymbol{x}(t))-B[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{w}']\|^2<\varepsilon\right\}=1.$$

证明. 因为 $G(\boldsymbol{x})\in L^2$,所以 $\forall\delta>0$,存在 $\boldsymbol{w}'$,使得

$$\int_D\|G(\boldsymbol{x})-B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}')\|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}<\delta^{[4]}.$$

另一方面,根据 Kolmogorov 强大数定理知

$$P\left\{\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1}\|G(\boldsymbol{x}(t))-B[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{w}')\|^2=E(\|G(\boldsymbol{x})-B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}')\|^2)\right\}=1.$$

设 $\rho_{\max}=\max\{\rho(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}\in D\}$,取 $\delta=\varepsilon/\rho_{\max}$, 则

$$E(\|G(\boldsymbol{x})-B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}')\|^2)=\int_D\rho(\boldsymbol{x})\|G(\boldsymbol{x})-B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}')\|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}<\rho_{\max}\cdot\delta=\varepsilon.$$

所以

$$\begin{aligned}&P\left\{\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1}\|G(\boldsymbol{x}(t))-B(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{w}')\|^2<\varepsilon\right\}\\&=P\left\{\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1}\|G(\boldsymbol{x}(t))-B(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{w}')\|^2-E(\|G(\boldsymbol{x})-B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}')\|^2)\right.\\&\qquad\left.<\varepsilon-E(\|G(\boldsymbol{x})-B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}')\|^2)\right\}\\&\geqslant P\left\{\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1}\|G(\boldsymbol{x}(t))-B(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{w}')\|^2-E(\|G(\boldsymbol{x}))\right.\\&\qquad\left.-B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}')\|^2=0\right\}=1.\end{aligned}$$

证毕.

定理 1. 若存在状态反馈(4)式，使受控系统(1)线性化为(3)式，且极点为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 其中 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$对于 $\boldsymbol{u}$ 可导且有界，$G(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{x}(t)$满足引理条件，则 $\forall \varepsilon > 0$，存在最优权值 $\boldsymbol{w}', T', J'$，使得

$$P\{E(\boldsymbol{w}', T', J') < \varepsilon\} = 1.$$

证明. 由引理知，$\forall \delta > 0$，存在 $\boldsymbol{w}'$，使得

$$P\left\{\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \|G(\boldsymbol{x}(t)) - B(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{w}')\|^2 < \delta\right\} = 1. \tag{10}$$

又因为 $\boldsymbol{x}(t+1) = A_0 \cdot \boldsymbol{x}(t)$ 极点为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，所以存在满秩阵 T_0 和 Jordan 矩阵 J_0，使得

$$T_0 A T_0^{-1} = J_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \sigma_{12} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \sigma_{n-1,n} \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

取 $T' = T_0$，$J' = J_0$，则 $T'A_0 - J'T' = 0$. 由此推得

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{w}', T', J') &\leqslant \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N} \sum_{t=0}^{N-1} (\|T' \cdot f[\boldsymbol{x}(t), B(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{w}')] - T'f[\boldsymbol{x}(t), G(\boldsymbol{x}(t))]\|^2 \\ &\quad + \|T'f[\boldsymbol{x}(t), G(\boldsymbol{x}(t))] - J'T' \cdot \boldsymbol{x}(t)\|^2) \\ &\leqslant \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N} \sum_{t=0}^{N-1} \|T_0\|_F^2 \cdot \|f[\boldsymbol{x}(t), B(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{w}')] - f[\boldsymbol{x}(t), G(\boldsymbol{x}(t))]\|^2. \end{aligned}$$

式中$\|\cdot\|_F$表示 Frobenius 范数. 设$\left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\|_F \leqslant C > 0$，则可推出

$$E(\boldsymbol{w}', T', J') \leqslant \frac{1}{2} \|T_0\|_F^2 \cdot C^2 \cdot \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \|B(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{w}') - G(\boldsymbol{x}(t))\|^2,$$

所以 $\forall \varepsilon > 0$. 取 $\delta = 2\varepsilon/(\|T_0\|_F^2 \cdot C^2)$，利用(10)式得

$$\begin{aligned} P\{E(\boldsymbol{w}', T', J') < \varepsilon\} \geqslant P &\left\{\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \|B(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{w}') - G(\boldsymbol{x}(t))\|^2 \right. \\ &\left. < 2\varepsilon/(\|T_0\|_F^2 \cdot C^2) = \delta\right\} = 1. \end{aligned}$$

证毕.

定理 1 表明，只要受控系统可线性化、可配置极点 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，则取 $\varepsilon_k \to 0$，存在 w_k, T_k, J_k，使 $P\{E(w_k, T_k, J_k) < \varepsilon_k\} = 1$. 由此可知 $P\{\lim_{k\to+\infty} E(w_k, T_k, J_k) = 0\} = 1$. 这正是设计 ANN 控制系统学习算法的理论依据.

定理 2. 设 $f \in L^2$，$\boldsymbol{x}(t) \in D$，D 为紧集，样本抽取密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ 在 D上几乎处处有下确界 $\rho_{\min} > 0$. 若利用 $\{\boldsymbol{x}(t)\}$ 对网络学习训练得权值 $\boldsymbol{w}', T'$，J'(T' 满秩)，使目标函数 $E(\boldsymbol{w}', T', J') < \varepsilon$，则有

1) 受控系统(1)在 NNC 网络作用下，以 $(2\varepsilon - \mu F(J'))/(r_{\min} \cdot \rho_{\min})$ 精度依概率 1 逼近于线性系统 $\boldsymbol{x}(t+1) = A' \cdot \boldsymbol{x}(t)$. 其中 $A' = T'^T J' T'$，$r_{\min} = \lambda_{\min}[T'^T T']$.

2) 线性化系统 $\boldsymbol{x}(t+1) = A'\boldsymbol{x}(t)$ 极点 $\sigma'_{11}, \cdots, \sigma'_{nn}$ 和待配置极点 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的误差估计为

$$\sum_{i=1}^{n} (\sigma'_{ii} - \lambda_i)^2 < \frac{2\varepsilon}{\mu}. \tag{11}$$

证明略.

根据定理 1 和 2 的结论,在实际中，可用适当的算法训练图 1 中各网络，当 $E(\boldsymbol{w}', T', J') = 0$ 或 $E(\boldsymbol{w}', T', J') \approx 0$ 时,可断定 ANN 方法能精确地或近似地实现线性化与极点配置,并能估计其逼近精度,这对于实际中信息不全的非线性控制系统来说，尤为重要.（限于篇幅，ANN 控制系统中各神经网络的学习算法将另文讨论.）

参 考 文 献

[1] 程代展,秦化淑,李树荣. 非线性控制系统的拓扑结构. 自动化学报,1991,**17**(2): 129—136.
[2] 高为炳,吴东南. 关于非线性系统的线性化问题. 中国科学(A), 1987, **17**(7): 740—748.
[3] Cheng D, Tarn T J, Isidori A. Global linearization of nonlinear systems via feedback. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 1985, **30**: 808—811.
[4] Necht Nielsen R. Theory of the back propagation neural nerwork. Proc. 1989 Intern. Joint Conf. Neural Net., 1989, **1**: 593—605.

A NEURAL NETWORK METHOD OF LINEARIZATION AND POLE PLACEMENT FOR THE NONLINEAR CONTROL SYSTEM

LI YINGUO ZHANG BANGLI CAO CHANGXIU
(Department of Automation Chongqing University, Chongqing 630044)

ABSTRACT

In this paper, a neural network approach for the feedback linearization and pole placement for the nonlinear control system is proposed, and its effectiveness in the sense of stochastic approximation is analysed.

Key words: Nonlinear system, linearization, neural networks.