第22卷 第6期
1996年11月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 22, No. 6
Nov., 1996

交叉耦合非线性系统的输出调节

马晓军　文传源
(北京航空航天大学自动控制系　北京　100083)

摘　　要

利用中心流形定理,给出交叉耦合非线性系统的输出调节问题可解的充要条件,定义了交叉耦合非线性系统的零误差流形. 利用幂级数展开的方法,给出该零误差流形存在的充要条件,并讨论了该零误差流形的局部收敛性.

关键词: 交叉耦合非线性系统,输出调节,中心流形,零误差流形,幂级数展开式.

1　引言

众所周知,使被控对象的输出跟踪(抑制)某个外系统产生的参考信号(扰动信号)是控制理论中的输出调节问题. 针对线性系统, Francis, Wonham 和 Hautus 对这一问题进行了深入研究;对于非线性系统的这类问题,许多学者也进行了研究,其中 Isidori 和 Byrnes 给出了非线性系统输出调节问题可解的充要条件[1,2]. 在 Isidori 和 Byrnes 工作的基础上,又有几位学者对该问题进行了进一步研究[3-5]. Huang 和 Rugh 在文献[6]中研究非线性系统输出调节问题时,定义了零误差流形 (zero-error manifold),给出了零误差流形存在的充要条件,并分析了零误差流形的稳定性和零误差轨迹 (zero-error trajectory) 的稳定性.

但是,这些学者的研究工作所考虑的外系统 (exosystem) 都不受对象的影响,即不与对象交叉耦合. 本文则考虑交叉耦合非线性系统的输出调节问题. 对于如下形式的非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x,u,\omega), \ x(0) = x_0, \\ \dot{\omega} = r(x,\omega), \ \omega(0) = \omega_0, \\ e = h(x,\omega).\end{cases} \tag{1}$$

其中对象状态 $x \in R^n$;输入 $u \in R^m$;外系统状态 $\omega \in R^q$;输出误差 $e \in R^p$; 对象 $f(x,u,\omega)$是定义在 $R^n \times R^m \times R^q$ 空间原点邻域中的光滑函数, 且 $f(0, 0, 0) = 0$; 外系统 $r(x,\omega)$ 是定义在 $R^n \times R^q$ 空间原点邻域中的光滑函数,且 $r(0,0) = 0$; $h(x,\omega)$ 是定义在 $R^n \times R^q$ 空间原点邻域中的光滑函数,且 $h(0,0) = 0$.

本文于1994年9月29日收到

2 基于中心流形定理的输出调节

本节首先给出状态反馈输出调节问题的定义[1]，然后应用常微分方程的中心流形定理研究交叉耦合非线性系统的状态反馈输出调节问题，给出了交叉耦合非线性系统的状态反馈输出调节问题可解的充要条件。

定义 2.1. 对于状态反馈输出调节,状态反馈控制律 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})$,使得闭环系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{\omega}],\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\\ \dot{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}),\ \boldsymbol{\omega}(0)=\boldsymbol{\omega}_0,\\ \boldsymbol{e}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\end{cases}\tag{2}$$

具有如下特性: (P1) 方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}),\ \boldsymbol{0}]$的平衡点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是局部指数稳定的; (P2)存在着点 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$的邻域 U,对于每一个初始条件 $[\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{\omega}(0)]\in U$, 闭环系统(2)的解满足 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{h}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{\omega}(t)]=\boldsymbol{0}$. 其中 $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\omega})$ 是定义在 $R^n\times R^q$ 空间原点邻域中的 C^k (整数 $k\geqslant 2$)函数,且 $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$,使得 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$是闭环系统的一个平衡点.

假设 2.1. 在点 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$ 处, $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})$关于 $\boldsymbol{x}$ 的偏导数矩阵为零阵,即

$$O=[\partial\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})/\partial\boldsymbol{x}]_{(0,0)}.$$

记 $q\times q$ 矩阵 $R=[\partial\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})/\partial\boldsymbol{\omega}]_{(0,0)}$.

假设 2.2. 矩阵R的特征值的实部全为零，并且对于属于 R^n 空间原点邻域中的所有 $\boldsymbol{x}$,点 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0}$ 是外系统的唯一的平衡点,且是李雅普诺夫稳定的.

假设 2.3. 未扰对象 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{0})$ 是可以局部指数镇定的.

引理 2.1. 假设 2.1 和 2.2 成立,如果某个状态反馈 $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})$使得特性 (P1)成立,则特性 (P2) 成立的充要条件是存在着定义在点 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0}$ 的邻域内的 C^k (整数 $k\geqslant 2$) 映射 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\omega})$且 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$,满足

$$[\partial\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\omega})/\partial\boldsymbol{\omega}]\cdot\boldsymbol{r}[\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{\omega}]=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{\omega}],\tag{3a}$$

并且对于闭环系统(2)的正极限集中的点 $(\boldsymbol{\pi}(\bar{\boldsymbol{\omega}}),\bar{\boldsymbol{\omega}})$,满足

$$\boldsymbol{h}[\boldsymbol{\pi}(\bar{\boldsymbol{\omega}}),\bar{\boldsymbol{\omega}}]=\boldsymbol{0}.\tag{3b}$$

证明. 如果假设 2.1 成立,则在点 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$ 的邻域U中,闭环系统(2)可以表示为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=[\partial\boldsymbol{f}/\partial\boldsymbol{x}+(\partial\boldsymbol{f}/\partial\boldsymbol{\theta})\cdot(\partial\boldsymbol{\theta}/\partial\boldsymbol{x})]_{(0,0)}\boldsymbol{x}\\ \qquad+[\partial\boldsymbol{f}/\partial\boldsymbol{\omega}+(\partial\boldsymbol{f}/\partial\boldsymbol{\theta})\cdot(\partial\boldsymbol{\theta}/\partial\boldsymbol{\omega})]_{(0,0)}\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}),\\ \dot{\boldsymbol{\omega}}=R\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}).\end{cases}\tag{4}$$

其中函数 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})$ 及其一阶偏导数在点 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$处都等于零.

若特性 (P1) 成立,则 $[\partial\boldsymbol{f}/\partial\boldsymbol{x}+(\partial\boldsymbol{f}/\partial\boldsymbol{\theta})\cdot(\partial\boldsymbol{\theta}/\partial\boldsymbol{x})]_{(0,0)}$的所有特征值有负实部.

由于R的特征值的实部全为零,根据中心流形定理，存在着定义在点 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0}$ 的邻域内的 C^k (整数 $k\geqslant 2$)映射 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\omega})$ 且 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$,满足 (3a) 式.

由假设 2.1 和 2.2 可知,外系统 $\dot{\boldsymbol{\omega}}=R\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\omega}),\ \boldsymbol{\omega})$的唯一平衡点 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0}$ 是李雅普诺夫稳定的. 根据降价原理 (Reduction Principle)[1]，闭环系统 (4) 的平衡点 $(\boldsymbol{x},$

$\omega) = (\mathbf{0},\mathbf{0})$是稳定的，其状态必定有界，因此，该系统的正极限集存在。

特性（P2）使得闭环系统（4）的正极限集中的点 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\omega}})$ 满足 $\boldsymbol{h}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\omega}}) = \mathbf{0}$，由于 $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\pi}(\bar{\boldsymbol{\omega}})$，所以，(3b)式成立。必要性得证。

如果（3a）式成立，则存在着定义在点 $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ 的邻域内的 C^k（整数 $k \geqslant 2$）映射 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\omega})$ 且 $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 是闭环系统的中心流形。

由于闭环系统(4)的平衡点 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{0},\mathbf{0})$ 是稳定的，那么，对于充分靠近原点的 $\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{\omega}(0)$ 和 $t \geqslant 0$，闭环系统(4)的解 $\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{\omega}(t)$ 仍然位于原点的任何一个任意小的邻域内。利用中心流形的局部吸引性[1]，即对于充分靠近原点的 $\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{\omega}(0)$和 $t \geqslant 0$，存在实数 $K,\alpha > 0$，满足 $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\omega}(t))\| \leqslant Ke^{-\alpha t}\|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\omega}(0))\|$。可知，随着 $t \to \infty$，必有 $\boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\omega}(t)) \to \boldsymbol{\pi}(\bar{\boldsymbol{\omega}})$，即调节误差 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{h}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{\omega}(t)] \to \boldsymbol{e} = \boldsymbol{h}[\boldsymbol{\pi}(\bar{\boldsymbol{\omega}}),\bar{\boldsymbol{\omega}}] = \mathbf{0}$。所以，特性(P2)成立。充分性得证。

定理 2.1. 若假设 2.1—2.3 成立，则交叉耦合非线性系统的状态反馈输出调节问题可解的充要条件是存在着定义在点 $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ 的邻域内的 C^k（整数 $k \geqslant 2$）映射 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\omega})$ 且 $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\omega})$且 $\boldsymbol{c}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，满足

$$[\partial\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\omega})/\partial\boldsymbol{\omega}]\cdot\boldsymbol{r}[\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{\omega}] = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{\omega}], \tag{5a}$$

并且对于闭环系统(2)的正极限集中的点 $(\boldsymbol{\pi}(\bar{\boldsymbol{\omega}}),\bar{\boldsymbol{\omega}})$，满足

$$\boldsymbol{h}[\boldsymbol{\pi}(\bar{\boldsymbol{\omega}}),\bar{\boldsymbol{\omega}}] = \mathbf{0}. \tag{5b}$$

证明. 根据引理 2.1 可知，必要性显然成立。下面证明充分性。

假设 2.3 成立，存在着状态反馈 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x})$ 且 $\boldsymbol{k}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，使得 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}),\ \mathbf{0}]$ 的平衡点 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 是局部指数稳定的。

若存在着定义在点 $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ 的邻域内的 C^k(整数 $k \geqslant 2$)映射 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\omega})$，且 $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\omega})$，且 $\boldsymbol{c}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 满足(5a)式和(5b)式。令 $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\omega}))$，显然，该状态反馈控制律使得特性(P1)成立。

由于 $\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{\omega}] = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\omega})$，(5a)式就变为(3a)式。另外，(5b)式与(3b)式相同，则根据引理 2.1 可知特性（P2）成立。所以，交叉耦合非线性系统的状态反馈输出调节问题可解。充分性得证。

3 基于幂级数展开的输出调节

本节首先给出交叉耦合非线性系统的零误差流形的定义，然后应用函数的幂级数展开的方法讨论该零误差流形的存在条件，给出交叉耦合非线性系统的零误差流形存在的充要条件。这里，交叉耦合非线性系统（1）中的各函数假设为解析函数而不是光滑函数。

定义 3.1. 在 R^q 空间原点的开邻域Ω中，假设存在着解析函数 $X:\Omega \to R^n$，且 $X(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$和 $U:\Omega \to R^m, U(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$。如果对于 $\forall\boldsymbol{\omega} \in \Omega$ 满足

$$[\partial X(\boldsymbol{\omega})/\partial\boldsymbol{\omega}]\cdot\boldsymbol{r}[X(\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{\omega}] = \boldsymbol{f}[X(\boldsymbol{\omega}),U(\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{\omega}],\boldsymbol{h}[X(\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{\omega}] = \mathbf{0}, \tag{6}$$

则集合 $M = \{(X(\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{\omega})\,|\,\boldsymbol{\omega} \in \Omega\}$称为交叉耦合非线性系统(1)的零误差流形。记矩阵$K$的 Kronecker 积为 $K^{(0)} = I, K^{(1)} = K, K^{(i)} = \underbrace{K\otimes K\otimes\cdots\otimes K}_{i}, i = 2,3,\cdots$。将交叉耦

合非线性系统(1)中的各函数按级数展开,可得

$$\begin{cases} f(x,u,\omega)=\sum\limits_{l\geqslant 1}\sum\limits_{i+j+k=l,i,j,k\geqslant 0}F_{ijk}x^{(i)}\otimes u^{(j)}\otimes\omega^{(k)}, \\ r(x,\omega)=\sum\limits_{l\geqslant 1}\sum\limits_{i+j=l,i,j\geqslant 0}R_{ij}x^{(i)}\otimes\omega^{(j)}, \\ h(x,\omega)=\sum\limits_{l\geqslant 1}\sum\limits_{i+j=l,i,j\geqslant 0}H_{ij}x^{(i)}\otimes\omega^{(j)}. \end{cases} \tag{7}$$

对于 $q\times 1$ 向量 ω,用 $\omega^{[l]}$ 表示向量

$$\omega^{[l]}=[\omega_1^l\ \ \omega_1^{l-1}\omega_2\cdots\omega_1^{l-1}\omega_q\ \ \omega_1^{l-2}\omega_2^2\ \ \omega_1^{l-2}\omega_2\omega_3\cdots\omega_1^{l-2}\omega_2\omega_q\cdots\omega_q^l]^T,$$

用 $\omega^{(l)}$ 表示向量 ω 的 Kronecker 积. $\omega^{[l]}$ 和 $\omega^{(l)}$ 的维数分别为 $C_{q+l-1}^l\times 1$ 和 $q^l\times 1$,并且存在着适当维数的矩阵 M_l 和 N_l,使得

$$\omega^{[l]}=M_l\omega^{(l)},\ \ \omega^{(l)}=N_l\omega^{[l]}. \tag{8}$$

显然, M_lN_l 是单位矩阵. 将 $X(\omega)$ 和 $U(\omega)$ 按幂级数展开,可得

$$X(\omega)=\sum_{k\geqslant 1}\Phi_k\omega^{[k]},\quad U(\omega)=\sum_{k\geqslant 1}\Psi_k\omega^{[k]}. \tag{9}$$

定理 3.1. 幂级数(9)式满足(6)式当且仅当对于 $l=1,2,\cdots$,下列矩阵方程成立

$$\Phi_lM_l\left[\sum_{i=1}^{l}I_q^{(i-1)}\otimes A_1\otimes I_q^{(l-i)}\right]N_l=F_{100}\Phi_l+F_{010}\Psi_l+U_l, \tag{10}$$

$$O=H_{10}\Phi_l+V_l. \tag{11}$$

其中 $U_1=F_{001},V_1=H_{01}$. 对于 $l=2,3,\cdots$,

$$U_l=\sum_{n=2}^{l}\sum_{i+j+k=n,i,j,k\geqslant 0}F_{ijk}G_{l-n}^{ij}N_l-\sum_{k=1}^{l-1}\Phi_kM_k\left[\sum_{i=1}^{k}I_q^{(i-1)}\otimes A_{l-k+1}\otimes I_q^{(k-i)}\right]N_l, \tag{12}$$

$$V_l=\sum_{n=2}^{l}\sum_{i+j=n,i,j\geqslant 0}H_{ij}G_{l-n}^{i0}N_l, \tag{13}$$

$$A_1=R_{10}\Phi_1+R_{01},\ \ A_{l-k+1}=R_{10}G_{l-k}^{10}+\sum_{n=2}^{l-k+1}\sum_{i+j=n,i,j\geqslant 0}R_{ij}G_{l-k-n+1}^{i0},$$

$$G_t^{ij}=\begin{cases} O, & i=j=0,t>0, \\ I, & i=j=t=0, \\ \Delta_{i,i+t}, & j=0,i=1,2,\cdots, \\ \Lambda_{j,j+t}, & i=0,j=1,2,\cdots, \\ \sum\limits_{s=0}^{t}\Delta_{i,i+s}\otimes\Lambda_{j,j+t-s}, & i,j=1,2,\cdots, \end{cases} \tag{14}$$

$$\Delta_{i,j}=\sum_{j_1+\cdots+j_i=j,j_1,\cdots,j_i\geqslant 1}\Phi_{j_1}M_{j_1}\otimes\Phi_{j_2}M_{j_2}\otimes\cdots\otimes\Phi_{j_i}M_{j_i}, \tag{15}$$

$$\Lambda_{i,j}=\sum_{j_1+\cdots+j_i=j,j_1,\cdots,j_i\geqslant 1}\Psi_{j_1}M_{j_1}\otimes\Psi_{j_2}M_{j_2}\otimes\cdots\otimes\Psi_{j_i}M_{j_i}. \tag{16}$$

证明. 将(7)—(9)式代入(6)式,可得

$$\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\omega}}\sum_{k\geqslant 1}\Phi_k M_k\boldsymbol{\omega}^{(k)}\right]\sum_{l\geqslant 1}\sum_{i+j=l,i,j\geqslant 0}R_{ij}X^{(i)}(\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{\omega}^{(j)}$$

$$=\sum_{l\geqslant 1}\sum_{i+j+k=l,i,j,k\geqslant 0}F_{ijk}X^{(i)}(\boldsymbol{\omega})\otimes U^{(j)}(\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{\omega}^{(k)},\tag{17}$$

$$\boldsymbol{O}=\sum_{l\geqslant 1}\sum_{i+j=l,i,j\geqslant 0}H_{ij}X^{(i)}(\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{\omega}^{(j)}.\tag{18}$$

根据(8)和(9)式，可得

$$X^{(i)}(\boldsymbol{\omega})=\left(\sum_{k\geqslant 1}\Phi_k M_k\boldsymbol{\omega}^{(k)}\right)^{(i)}=\sum_{l\geqslant i}\Delta_{i,l}\boldsymbol{\omega}^{(l)},$$

$$U^{(j)}(\boldsymbol{\omega})=\left(\sum_{k\geqslant 1}\Psi_k M_k\boldsymbol{\omega}^{(k)}\right)^{(j)}=\sum_{l\geqslant j}\Lambda_{j,l}\boldsymbol{\omega}^{(l)}.$$

其中 $\Delta_{i,l}$ 和 $\Lambda_{j,l}$ 分别由(15)和(16)式给出，则

$$X^{(i)}(\boldsymbol{\omega})\otimes U^{(j)}(\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{\omega}^{(k)}=\left[\sum_{l\geqslant i}\Delta_{i,l}\boldsymbol{\omega}^{(l)}\right]\otimes\left[\sum_{m\geqslant j}\Lambda_{j,m}\boldsymbol{\omega}^{(m)}\right]\otimes\boldsymbol{\omega}^{(k)}$$

$$=\sum_{t\geqslant 0}G_t^{ij}\boldsymbol{\omega}^{(i+j+k+t)}.$$

其中 G_t^{ij} 由(14)式给出.

由于 $G_{l-1}^{10}=\Delta_{1,l}=\Phi_l M_l$，$G_{l-1}^{01}=\Lambda_{1,l}=\Psi_l M_l$，所以，(17)和(18)式等号右边的项可以分别表示为关于 $\boldsymbol{\omega}$ 的幂级数展开式

$$\sum_{l\geqslant 1}\left[F_{100}\Phi_l+F_{010}\Psi_l+F_{001}G_{l-1}^{00}N_l+\sum_{n=2}^{l}\sum_{i+j+k=n,i,j,k\geqslant 0}F_{ijk}G_{l-n}^{ij}N_l\right]\boldsymbol{\omega}^{[l]},\tag{19}$$

$$\sum_{l\geqslant 1}\left[H_{10}\Phi_l+H_{01}G_{l-1}^{00}N_l+\sum_{n=2}^{l}\sum_{i+j=n,i,j\geqslant 0}H_{ij}G_{l-n}^{i0}N_l\right]\boldsymbol{\omega}^{[l]}.\tag{20}$$

(17)式等号左边的 $\sum_{l\geqslant 1}\sum_{i+j=l,i,j\geqslant 0}R_{ij}X^{(i)}(\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{\omega}^{(j)}$ 可以表示为关于 $\boldsymbol{\omega}$ 的幂级数展开式 $\sum_{r\geqslant 1}\left[R_{10}G_{r-1}^{10}+R_{01}G_{r-1}^{00}+\sum_{n=2}^{r}\sum_{i+j=n,i,j\geqslant 0}R_{ij}G_{r-n}^{i0}\right]\boldsymbol{\omega}^{(r)}$.

如果记 $A_r=R_{10}G_{r-1}^{10}+R_{01}G_{r-1}^{00}+\sum_{n=2}^{r}\sum_{i+j=n,i,j\geqslant 0}R_{ij}G_{r-n}^{i0}$，则(17)式等号左边的项可以表示为

$$\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\omega}}\sum_{k\geqslant 1}\Phi_k M_k\boldsymbol{\omega}^{(k)}\right]\sum_{r\geqslant 1}A_r\boldsymbol{\omega}^{(r)}.\tag{21}$$

利用恒等式

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}^{(k)}}{\partial\boldsymbol{\omega}}=\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{\omega}^{(i-1)}\otimes I_q\otimes\boldsymbol{\omega}^{(k-i)},\ k=1,2,\cdots,$$

$$[\boldsymbol{\omega}^{(i)}\otimes I_q\otimes\boldsymbol{\omega}^{(j)}]A_k\boldsymbol{\omega}^{(k)}=[I_q^{(i)}\otimes A_k\otimes I_q^{(j)}]\boldsymbol{\omega}^{(i+j+k)},$$

(21)式可以表示为

$$\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\omega}}\sum_{k\geqslant 1}\Phi_k M_k\boldsymbol{\omega}^{(k)}\right]\sum_{r\geqslant 1}A_r\boldsymbol{\omega}^{(r)}$$

$$= \sum_{r\geqslant 1}\left\{\sum_{k\geqslant 1}\Phi_k M_k\left[\sum_{i=1}^{k}(I_q^{(i-1)}\otimes A_r\otimes I_q^{(k-i)})\omega^{(k+r-1)}\right]\right\}.$$

利用(8)式,(21)式可以表示为关于 ω 的幂级数展开式

$$\sum_{l\geqslant 1}\left[\sum_{k=1}^{l}\Phi_k M_k\left(\sum_{i=1}^{k}I_q^{(i-1)}\otimes A_{l-k+1}\otimes I_q^{(k-i)}\right)\right]N_l\omega^{[l]}. \tag{22}$$

比较(19)和(22)式中 $\omega^{[l]}$ 前的系数，可以得(10)式. 其中 $U_1 = F_{001}$, $U_l(l=2,3,\cdots)$由(12)式给出.

根据(18)和(20)式,可得(11)式. 其中 $V_1 = H_{01}, V_l(l=2,3,\cdots)$由(13)式给出.

4 交叉耦合非线性系统的零误差流形的局部收敛性

在分析交叉耦合非线性系统的零误差流形的局部收敛性时，不必要求交叉耦合非线性系统(1)中的各函数均为解析函数,只要是 C^2 函数即可.

取非线性状态反馈控制律 $u(t)=\theta[x(t),\omega(t)]$,使得闭环对象可以表示为

$$\dot{x} = f[x(t),\theta[x(t),\omega(t)],\omega(t)] = f_c[x(t),\omega(t)],\quad x(0)=x_0.$$

其中 θ 是定义在 $R^n\times R^q$ 空间原点的邻域中的 C^2 函数,且 $\theta(0,0)=0$.

交叉耦合非线性系统的零误差流形见定义 3.1,其中的函数 $X(\omega)$和 $U(\omega)$不必是解析函数,而只需是 C^2 函数.

假设 4.1. 对于 $\forall\omega\in\Omega,(\partial f[X(\omega),U(\omega),\omega]/\partial x,\partial f[X(\omega),U(\omega),\omega]/\partial u)$ 是可控的.

在可控性假设 4.1 成立的条件下,存在一个 C^2 函数阵 $K:\Omega\to R^{m\times n}$, 使上述非线性状态反馈控制律可以具体地构造为 $u(t)=U(\omega(t))+K(\omega(t))[x(t)-X(\omega(t))]$. 显然,在交叉耦合非线性系统的零误差流形上,该状态反馈控制律能使交叉耦合非线性系统(1)实现精确的输出调节.

假设 4.2. 假设 $\partial f_c[X(\omega),\omega]/\partial x = \partial f[X(\omega),U(\omega),\omega]/\partial x + \{\partial f[X(\omega),U(\omega),\omega]/\partial u\}\cdot K(\omega)$ 的任意特征值 λ 对于 $\forall\omega\in\Omega$ 都满足 $\mathscr{R}(\lambda)\leqslant\mu<0$.

取 R^n 空间的开集 $X\subset R^n$ 且 $M\subset X\times\Omega$,讨论定义在$X\times\Omega$上的 C^2函数 $f_c[x(t),\omega(t)]$. 取开集 $\Omega_\delta\subset\Omega$,使得 $M_\delta=\{(X(\omega),\omega)\mid\omega\in\Omega_\delta\}$在$M$上是相对紧的.

假设 4.3. 对于 $\forall t\geqslant 0$, $[X(\omega(t)),\omega(t)]\in M_\delta$.

定理 4.1. 假设 4.1—4.3 成立,如果存在 $\varepsilon>0$,使得对于 $\forall t\geqslant 0$, $\|\dot{\omega}(t)\|<\varepsilon$, 则交叉耦合非线性系统的零误差流形是局部指数稳定的.

证明过程与参考文献[6]的定理 4.1 的证明相类似，此不赘述. 该定理说明，当参考信号(或扰动信号)变化缓慢时，交叉耦合非线性系统的零误差流形是局部指数稳定的.

参 考 文 献

[1] Isidori A, Byrnes C I. Output regulation of nonlinear Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1990, **35**(2): 131—140.

[2] Byrnes C I, Isidori A, Willems J C. Stabilization and output regulation of nonlinear systems in the large. Proc. of the 29th Conf. Dec. Contr., 1990, **3**: 1255—1261.

[3] Castillo B. Output regulation of non-linear systems with more inputs than outputs. *Int.J.Contr.*, 1993, **57**(6): 1343—1356.
[4] Castillo B, Di Gennaro S, Monaco S, Normand-Cyrot D. Nonlinear regulation for a class of discrete-time systems. *Syst. Contr. Lett.*, 1993, **20**(1): 57—65.
[5] Shi J. Robust output regulator for nonlinear systems. *Int. J. Contr.*, 1993, **58**(6): 1347—1360.
[6] Huang J, Rugh W J. Stabilization on zero-error manifolds and the nonlinear servomechanism problem. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1992, **37**(7): 1009—1013.

THE OUTPUT REGULATION FOR THE CROSS COUPLING NONLINEAR SYSTEMS

MA XIAOJUN　　WEN CHUANYUAN
(Dept. of Automatic Control, Beijing University of Aero. and Astro. Beijing 100083)

ABSTRACT

In this paper, the problem of the output regulation for the cross coupling nonlinear system is studied. It is shown that, under the centre manifold theory, the problem is solvable if and only if a certain nonlinear partial differential equation is solvable. A zero-error manifold for the cross coupling nonlinear system is defined, a sufficient and necessary condition about the existence of the zero-error manifold is given, which is based on power series expansions, and then the local convergence of the zero-error manifold is discussed.

Key words: Cross coupling nonlinear system,output regulation, centre manifold, zero-error manifold, power series expansion.

马晓军　1969 年生. 1990 年毕业于北京航空航天大学自动控制系飞行器控制专业,1992 年获该校计算机控制专业硕士学位, 1995 年 11 月在北京航空航天大学获飞行器控制、制导与仿真博士学位. 现在清华大学计算机科学与技术系做博士后研究工作. 主要研究兴趣为飞行器控制和制导、神经网络控制、鲁棒控制、非线性系统的输出调节及跟踪.

文传源　简介及照片见本刊第 18 卷第 3 期.