短文

线性时变周期系统的鲁棒稳定及 H^∞ 控制[1)]

谈 侃 王朝珠
(中国科学院系统科学研究所 北京 100080)

摘 要

给出带有结构性不确定的线性时变周期系统二次稳定的充要条件，并指出为该系统设计鲁棒动态补偿器和具有 H^∞ 指标 γ 的鲁棒动态补偿器问题都可以转化成相应的确定性辅助线性时变周期系统的 H^∞ 控制问题.

关键词: 线性时变周期系统 (LTVPS), 二次稳定, H^∞ 控制.

1 引言

控制系统的鲁棒性设计日益受到人们的重视. 所谓鲁棒性设计是指为系统设计控制器，当系统的不确定性在某个允许范围内变化时，系统仍具有预先要求的性质(如稳定性)或品质(如抗外干扰指标). 对于带有结构性不确定和外干扰的线性定常系统，[1-3] H^∞ 方法成功地解决了其鲁棒控制问题. 本文在文[4]的基础上，用 H^∞ 方法讨论 LTVPS 的鲁棒控制问题.

2 问题的叙述及有关引理

给定带有结构性不确定 LTVPS

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= [A(t)+\Delta A(t)]\boldsymbol{x}(t)+B_1(t)\boldsymbol{w}(t)+[B_2(t)+\Delta B(t)]\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{y}(t) &= [C_2(t)+\Delta C(t)]\boldsymbol{x}(t)+D_{21}(t)\boldsymbol{w}(t)+[D_{22}(t)+\Delta D(t)]\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{z}(t) &= C_1(t)\boldsymbol{x}(t)+D_{12}(t)\boldsymbol{u}(t).\end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{R}^n$ 是状态，$\boldsymbol{u}\in\mathscr{R}^m$ 是控制，$\boldsymbol{w}\in\mathscr{R}^q$ 是外干扰，$\boldsymbol{y}\in\mathscr{R}^r$ 是量测输出，$\boldsymbol{z}\in\mathscr{R}^p$ 是调节输出.

假设. 1) $\boldsymbol{w}(t)\in L_2[0,\infty)$; 2) $A(t),B_1(t),B_2(t),C_1(t),C_2(t),D_{12}(t),D_{21}(t),D_{22}(t)$ 是适当维数的分段连续实有界的 T 周期阵值函数，由它们组成的系统是标称系统; 3)

1) 国家自然科学基金资助项目.
本文于1994年2月3日收到

$\Delta A(t),\Delta B(t),\Delta C(t),\Delta D(t)$ 表示不确定性，有

$$\begin{bmatrix} \Delta A(t), & \Delta B(t) \\ \Delta C(t), & \Delta D(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \end{bmatrix} F(t)[E_1(t),E_2(t)]. \tag{2.2}$$

其中 $H_1(t)$, $H_2(t)$, $E_1(t)$, $E_2(t)$ 是适应维数的分段连续实有界的 T 周期阵值函数. $F(t)$ 的元是 Lebesgue 可测的且满足

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I_k,\ \forall t. \tag{2.3}$$

定义 2.1. 给定带有结构性不确定的 LTVPS

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= [A(t) + \Delta A(t)]\boldsymbol{x}(t) + B_1(t)\boldsymbol{w}(t), \\ \boldsymbol{x}(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 $A(t),\Delta A(t)$ 如上述，如果存在一个 T 周期的实阵值函数 $P(t) = P^{\mathrm{T}}(t) > 0$，对所有允许的 $\Delta A(t)$ 有

$$\dot{P}(t) + [A(t) + \Delta A(t)]^{\mathrm{T}}P(t) + P(t)[A(t) + \Delta A(t)] < 0,$$

则称系统(2.4)是内部二次稳定的.

定义 2.2. 给定 T 周期的动态补偿器

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_c(t) &= A_c(t)\boldsymbol{x}_c(t) + B_c(t)\boldsymbol{y}(t), \\ \boldsymbol{u}(t) &= C_c(t)\boldsymbol{x}_c(t). \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $A_c(t),B_c(t),C_c(t)$ 是适当维数的分段连续实有界的 T 周期阵值函数.

1) 如果(2.1), (2.5)式组成的闭环系统是内部二次稳定的，则称(2.5)式为鲁棒镇定动态补偿器.

2) 对预先给定的 $\gamma > 0$. 如果(2.1),(2.5)式组成的闭环系统是内部二次稳定的,且 $J(\boldsymbol{z}\boldsymbol{w}) < \gamma^2$. 其中

$$J(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) = \sup_{\substack{\boldsymbol{w}\in L_2[0,\infty) \\ \boldsymbol{w}\neq 0}} \frac{\|\boldsymbol{z}\|_2^2}{\|\boldsymbol{w}\|_2^2},$$

则称(2.5)式是具有 H^∞ 指标 γ 的鲁棒动态补偿器.

本文讨论的主要问题是：如何为系统(2.1)设计鲁棒镇定动态补偿器和具有 H^∞ 指标 γ 的鲁棒动态补偿器.

引理 2.1[4]. 给定 LTVPS

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= A(t)\boldsymbol{x}(t) + B_1(t)\boldsymbol{w}(t),\ \boldsymbol{x}(0) = 0, \\ \boldsymbol{z}(t) &= C_1(t)\boldsymbol{x}(t). \end{aligned} \tag{2.6}$$

对给定的 $\gamma > 0$，下面的叙述等价：

1) $A(t)$ 是渐近稳定的且 $J(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) < \gamma^2$;

2) 存在一个非负定 T 周期阵 $P(t) = P^{\mathrm{T}}(t)$ 是周期 Riccati 微分方程 (PRDE) 的解，即

$$\dot{P}(t) + A^{\mathrm{T}}(t)P(t) + P(t)A(t) + \gamma^{-2}P(t)B_1(t)B_1^{\mathrm{T}}(t)P(t) + C_1^{\mathrm{T}}(t)C_1(t) = 0, \tag{2.7}$$

且 $[A(t) + \gamma^{-2}B_1(t)B_1^{\mathrm{T}}(t)P(t)]$ 是渐近稳定的;

3) 存在一个 T 周期阵 $Q(t) = Q^{\mathrm{T}}(t) > 0$ 满足不等式

$$\dot{Q}(t) + A^{\mathrm{T}}(t)Q(t) + Q(t)A(t) + \gamma^{-2}Q(t)B_1(t)B_1^{\mathrm{T}}(t)Q(t) + C_1^{\mathrm{T}}(t)C_1(t) < 0. \tag{2.8}$$

3　鲁棒动态补偿器的设计

引理 3.1 给定阵值函数 $A(t),H_1(t)$, $E_1(t)$，对所有满足 (2.3) 式的 $F(t)$，存在 T 周期阵 $P(t)=P^{\mathrm{T}}(t)>0$，使得

$$\dot{P}(t)+[A(t)+H_1(t)F(t)E_1(t)]^{\mathrm{T}}P(t)+P(t)[A(t)+H_1(t)F(t)E_1(t)]<0$$

成立的充要条件是：存在一个分段连续 T 周期函数 $\varepsilon(t)>0$，使得 $P(t)$ 和 $\varepsilon(t)$ 一起满足矩阵不等式

$$\dot{P}(t)+A^{\mathrm{T}}(t)P(t)+P(t)A(t)+\varepsilon^2(t)P(t)H_1(t)H_1^{\mathrm{T}}(t)P(t)+\varepsilon^{-2}(t)E_1^{\mathrm{T}}(t)E_1(t)<0.$$

引理充分性的证明可见文[4]. 必要性证明可按文[1]所用的方法得 $\varepsilon(t)$ 的存在性，然后再证明 $\varepsilon(t)$ 的周期性和连续性.

定理 3.1. 系统 (2.4) 是内部二次稳定的充要条件是，存在分段连续 T 周期的函数 $\varepsilon(t)>0$，使得

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(t)\boldsymbol{x}(t)+\varepsilon(t)H_1(t)\tilde{\boldsymbol{w}}(t),\\&\boldsymbol{x}(t_0)=0,\\&\tilde{\boldsymbol{z}}=\varepsilon^{-1}(t)E_1(t)\boldsymbol{x}(t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

满足 $A(t)$ 是渐近稳定的且 $J(\tilde{\boldsymbol{z}},\tilde{\boldsymbol{w}})<1$.

定理的证明要用到引理 3.1 和引理 2.1 中的第三个等价条件.

定理 3.2. 动态补偿器(2.5)是系统(2.1)的鲁棒镇定动态补偿器的充要条件是：存在一个分段连续 T 周期函数 $\varepsilon(t)>0$，使得辅助系统(3.2)和(2.5)组成的闭环系统内部渐近稳定，且 $J(\tilde{\boldsymbol{z}},\tilde{\boldsymbol{w}})<1$.

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(t)\boldsymbol{x}(t)+\varepsilon(t)H_1(t)\tilde{\boldsymbol{w}}(t)+B_2(t)\boldsymbol{u}(t),\\&\boldsymbol{y}(t)=C_2(t)\boldsymbol{x}(t)+\varepsilon(t)H_2(t)\tilde{\boldsymbol{w}}(t)+D_{22}(t)\boldsymbol{u}(t),\\&\tilde{\boldsymbol{z}}=\varepsilon^{-1}(t)E_1(t)\boldsymbol{x}(t)+\varepsilon^{-1}(t)E_2(t)\boldsymbol{u}(t).\end{aligned}\tag{3.2}$$

证明略.

定理 3.3. 给定 $\gamma>0$，动态补偿器(2.5)是系统(2.1)的具有 H^∞ 指标 γ 的鲁棒动态补偿器的充要条件是；存在一个分段连续 T 周期函数 $\varepsilon(t)>0$，使辅助系统(3.3)，(2.5)组成的闭环系统是内部渐近稳定，且 $J(\tilde{\boldsymbol{z}},\tilde{\boldsymbol{w}})<1$.

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(t)\boldsymbol{x}(t)+[\varepsilon(t)H_1(t),\gamma^{-1}B_1(t)]\tilde{\boldsymbol{w}}(t)+B_2(t)\boldsymbol{u}(t),\\&\boldsymbol{y}(t)=C_2(t)\boldsymbol{x}(t)+[\varepsilon(t)H_2(t),\gamma^{-1}D_{21}(t)]\tilde{\boldsymbol{w}}(t)+D_{22}(t)\boldsymbol{u}(t),\\&\tilde{\boldsymbol{z}}=\begin{bmatrix}\varepsilon^{-1}(t)E_1(t)\\C_1(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}\varepsilon^{-1}(t)E_2(t)\\D_{12}(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t).\end{aligned}\tag{3.3}$$

证明略.

注. 由于在证明定理 3.2、定理 3.3 时，均用到引理 3.1，因而在其辅助系统中都含有一个 T 周期函数 $\varepsilon(t)>0$. 它是为了证明引理 3.1 的必要性而引入的. 然而在实际设计中只要能保证引理 3.1 (因而定理 3.2、定理 3.3) 的充分性就足够了. 因此，为了简单可取 $\varepsilon(t)$ 为常数.

参 考 文 献

[1] Khargonekar P P, Petersen I R, Zhou K. Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stability and H^∞ control theory. *IEEE Trans.* 1990, **AC-35**: 356—361.
[2] Petersen I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. *Systems & Control Letters* 1987, **8**: 351—357.
[3] Xie L, Fu M, Souza C E D. H^∞ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback. *IEEE Trans.* 1992, **AC**-37: 1253—1256.
[4] Xie L, Souza C E D. H^∞ filtering for linear periodic systems with parameter uncertainty. *Systems & Control Letters* 1991, **17**: 343—350.

ROBUST STABILIZATION OF LINEAR TIME-VARYING PERIODIC SYSTEMS AND H^∞ CONTROL

TAN KAN WANG CHAOZHU

(*Institute of Systems Science, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

ABSTRACT

This paper gives a necessary and sufficient condition for the quadratic stability of the linear time-varying periodic systems with norm-bounded uncertainty. It is also shown that for linear time-varying periodic systems with norm-bounded uncertainty, the design of the robust stabilizing compensator and the robust compensator with prescribed H^∞ index γ can both be transferred to solving the standard H^∞ control problems of the appropriate auxiliary linear time-varying periodic systems without uncertainty.

Key words: Linear time-varying periodic systems, quadratic stability, H^∞ control.