短 文

时域矩阵方法的扩展[1)]

曾建平 林 都 陆载德
(华北工学院自控系 太原 030051)

摘 要

基于信号重构的思想,提出了一种系统分析方法. 该方法是对时域矩阵方法的改进,既保留了时域矩阵方法快速性的特点,又能在不改变仿真步长的前提下,提高仿真精度. 对该方法的截断误差做出了估计,并证明了该方法的收敛性. 仿真例子说明了其有效性.

关键词: 线性定常系统,时域矩阵,函数逼近,分段多项式, Laplace 变换.

1 引言

时域矩阵法[1]是一种较常用的快速仿真算法,其在线运算仅为一个离散卷积,计算量不大,且与系统阶次无关. 该方法的不足之处是大步长仿真时精度不高,要提高仿真精度,只能减小步长. 在实际工作中会遇到不允许改变步长或改变步长较困难的情形,如在一些模拟训练器和半实物仿真系统中,其某一仿真子系统的输入信号来自于另一子系统的输出. 当后一子系统由实物构成时,其采样周期是不能任意改变的,即使该子系统是一个仿真系统,要改变其输出信号的采样周期,也需要对仿真软件进行修改,增加额外的工作量. 本文的工作对时域矩阵方法进行了改进,使之在仿真步长一定的情况下,仍能以计算量增加不大的代价,获得较高的仿真精度.

2 算法推证

定义函数

$$\phi(t-nT)=\begin{cases}1, & t\in[nT,nT+T),\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

其中 $n\in\overline{Z^-}$, $T\in R^+$, 则任意输入信号 $r(t)$ 可用以 T 为采样周期的一系列采样值 $r(kT)$, 用一个 p 阶分段多项式 $\tilde{r}(t)$ 近似表示为

$$\tilde{r}(t)=\sum_{i=0}^{\infty}L_i(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p}a_{ij}(t-iT)^j\phi(t-iT). \tag{2.1}$$

1) 本文得到兵总预研课题及山西省青年基金资助.
本文于1995年5月13日收到

在 $[iT, iT+T)$ 上，$L_i(t)$ 的系数 $a_{ij}(j=0,1,\cdots,p)$ 可由 $r(t)$ 的第 $i+1$ 个采样点前的 $p+1$ 个采样值插值得出。以 r_k 简记 $r(kT)$，则 a_{ij} 满足矩阵方程

$$Hx_i = y_i. \tag{2.2}$$

其中 $H \triangleq (h_{ij})_{(p+1)\times(p+1)}$，$h_{ij}=(i-p)^{j-1}$，$x_i \triangleq (a_{i_0}, a_{i_1}T, \cdots, a_{i_p}T^p)^T$，$y_i \triangleq (r_{i-p+1}, r_{i-p+2}, \cdots, r_{i+1})^T$。

引理 1[2]. 设 $L(x)$ 是 $f(x)$ 的 q 阶插值多项式，$x_0, x_1, \cdots, x_q$ 是由小到大的 $q+1$ 个插值节点，$f(x)\in C^{(q+1)}(I)$，$I\triangleq(a,b)\supset(x_0,x_q)$，$E_q(x)=f(x)-L(x)$ 为插值多项式 $L(x)$ 在 I 上的截断误差，则

$$E_q(x) = \frac{f^{(q+1)}(\xi)}{(q+1)!}\prod_{i=0}^{q}(x-x_i),\ \xi\in I.$$

引理 2. 若 $r(t)\in C^{(p+1)}(R^+)$，则 $r(t)$ 的 p 阶分段逼近多项式 $\tilde{r}(t)$ 的截断误差 $E^*(t)=r(t)-\tilde{r}(t)$ $(t\in R^+)$ 满足

$$|E^*(t)| \leqslant \frac{MT^{p+1}}{p+1},\quad M=\max_{\eta\in R^+}|r^{(p+1)}(\eta)|.$$

引理 3[3]. 若 $f(t)$ 满足 1) 在 $t\geqslant 0$ 的任意有限区间上分段连续；2) $\exists c\geqslant 0$, s. t. $f(t)=O(e^{ct})$，则 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ 在 $\mathrm{Re}(s)>c$ 上存在且解析。

定理 1. 若 $r(t)\in C^{(p+1)}(R^+)$ 且满足引理 3 的条件 1), 2)，则 $\tilde{R}(s)=\mathscr{L}[\tilde{r}(t)]\triangleq\int_0^\infty \tilde{r}(t)e^{-st}dt$ 在 $\mathrm{Re}(s)>c$ 上存在、解析，且

$$\tilde{R}(s)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p}\frac{j!\,a_{ij}e^{-iTs}}{s^{j+1}}\left[1-e^{-Ts}\sum_{k=0}^{j}\frac{(Ts)^k}{k!}\right].$$

证. 由引理 2、引理 3 可得.

引理 4. 若 $r(t)$ 满足定理 1 的条件，则 $\sum_{i=0}^{\infty}a_{ij}e^{-iTs}$ 在 $\mathrm{Re}(s)>c$ 上内闭一致收敛.

证. 由 Cauchy 一致收敛定理[4]可得.

记 $G_j(s)=\frac{j!\,G(s)}{s^{j+1}}\left[1-e^{-Ts}\sum_{k=0}^{j}\frac{(Ts)^k}{k!}\right]$，$G(s)$ 为系统开环传递函数，则输出响应 $c(t)$ 的近似值 $\tilde{c}(t)$ 为

$$\begin{aligned}\tilde{c}(t) &= \mathscr{L}^{-1}[\tilde{R}(s)G(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p}a_{ij}G_j(s)\,e^{-iTs}\right]\\ &= \sum_{j=0}^{p}g_j(t)*\mathscr{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\infty}a_{ij}\,e^{-iTs}\right].\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $g_j(t)=\mathscr{L}^{-1}[G_j(s)]$，$\mathscr{L}^{-1}$ 为反拉氏变换算子，$*$为卷积算子，由引理 4，式(2.3)可化为

$$\tilde{c}(t)=\sum_{j=0}^{p}\sum_{i=0}^{\infty}g_j(t)*a_{ij}\delta(t-iT)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p}a_{ij}\,g_j(t-iT). \tag{2.4}$$

式(2.4)写成离散形式,即

$$\tilde{c}_k = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{p} a_{ij} g_j(k-i). \tag{2.5}$$

其中 $\tilde{c}_k \triangleq \tilde{c}(kT)$, $g_j(k-i) \triangleq g_j(kT-iT)$. 当 $p=0$ 时,式(2.5)退化成

$$\tilde{c}_k = \sum_{i=0}^{k} a_{i0} g_0(k-i). \tag{2.6}$$

其中 $a_{i0}=r_i$, $g_0(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G(s)\right]$. 可见,上式即为以 T 为采样周期、采用零阶保持器时的时域矩阵方法的计算公式. 据此,式(2.5)可认为是对时域矩阵方法的改进.

3 敛散性分析

引理 5. 在定理 1 的条件下,系统输出响应的截断误差 $\Delta(t)=c(t)-\tilde{c}(t)$ 满足

$$|\Delta(t)| \leqslant \frac{MT^{p+1}}{p+1}\int_0^t |g(t-\tau)|\mathrm{d}\tau,\ g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)].$$

证. $\mathscr{L}[\Delta(t)]=C(s)-\tilde{C}(s)=G(s)\mathscr{L}[E^*(t)]$,

从而 $$|\Delta(t)| = \left|\int_0^t g(t-\tau)E^*(\tau)\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \int_0^t |g(t-\tau)|\cdot|E^*(\tau)|\mathrm{d}\tau \leqslant \frac{MT^{p+1}}{p+1}\int_0^t |g(t-\tau)|\mathrm{d}\tau.$$

在有限仿真时间 $t<t_0$ (t_0 为一给定常数)内, $\int_0^t |g(t-\tau)|\mathrm{d}\tau$ 有界,由引理 5 有

引理 6. 在定理 1 条件下,给定仿真时间 $t<t_0$ 内,有

$$|\Delta(t)| \leqslant \frac{MNT^{p+1}}{p+1},\ N=\int_0^{t_0}|g(t-\tau)|\mathrm{d}\tau,\ (t\leqslant t_0).$$

定理 2. 在引理 6 条件下, 若 $T\leqslant 1$, 则通过对输入信号的充分高阶分段多项式逼近,或者使 T 充分小,都可使系统输出响应近似解任意逼近其精确解.

4 仿真例子

设系统开环传递函数 $G(s)=\frac{s+4}{s^3+6s^2+11s+6}$, $T=0.1$, $r(t)=10\sin t$, 计算结果见表 1.

表中精确解系由解析式算出. 从表 1 可见, 提高逼近多项式阶数 p, 对仿真结果的精度有显著影响,大量仿真试验表明,在仿真步长相同的条件下, p 取 4 时仿真结果精度较时域矩阵方法已有大幅度的提高.

表 1

时间 (s) \ 输出响应	精确解	近似解 $p=0$	近似解 $p=2$	近似解 $p=4$
0.5	0.158123	0.15789	0.158087	0.158102
1.5	2.198443	2.192600	2.194310	2.194410
2.5	4.392010	4.388350	4.391960	4.392010
3.5	3.617890	2.192600	2.194310	2.194410
4.5	−5.15224e-2	−5.14782e-2	−5.14914e-2	−5.15231e-2
5.5	−3.509640	−3.506710	−3.509540	−3.509640
6.5	−3.679960	−3.676900	−3.680030	−3.679970
7.5	−0.444394	−0.444025	−0.444264	−0.444397
8.5	3.208060	3.205390	3.207950	3.208070
9.5	3.914100	3.910840	3.914150	3.914110

5 结语

本文方法在线运算量为 $p+1$ 个卷积之和，与时域矩阵方法属同一量级，即在 n 个仿真步距内，乘法运算量为 $O(n^2)$，与系统的阶次无关。而且，易于估计在线计算的时间，从而可为在线仿真计算步长的选取提供一个定量的极限标准。该方法的特点是，可在不减小仿真步长的前提下，通过提高逼近多项式的阶数来提高仿真精度，为在不方便改变仿真步长的情况下，达到一定的仿真精度要求提供了一条新的途径。另外，从该方法的推导过程可见，虽然该方法是基于线性定常系统的，但对纯滞后环节进行处理后，也能适用于仅含纯滞后环节的非线性系统仿真。与时域矩阵方法一样，该方法也能用于闭环系统仿真及基于结构图的非线性系统仿真。

参 考 文 献

[1] 熊光楞编著．控制系统数字仿真．北京：清华大学出版社．1988．

[2] 邓建中，葛仁杰，程正兴．计算方法．西安：西安交通大学出版社．1985．

[3] 南京工学院数学教研组编．积分变换．北京：人民教育出版社．1983．

[4] 余家荣编．复变函数．北京：高等教育出版社．1986．

THE EXTENSION OF TIME-DOMAIN MATRIX METHOD

ZENG JIANPING LIN DU LU ZAIDE
(Dept. of Automation, North China Institute of Technology, Taiyuan 030051)

ABSTRACT

Based on signal reconstruction, a system analysis method is proposed. The method is an extention of time-domain matrix simulation approach. It remains the characteristic of fastness of time-domain matrix method, and has higher simulation precision without changing simulation step. The truncation error of the method is estimated and its convergence is proved. An example is given to demonstrate the availability of the proposed method.

Key words: Linear constant system, time-domain matrix, function approximation, piecewise polynomial, Laplace transformation.