第22卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 22, No. 5
1996年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1996

短 文

# 完全滞后系统的滞后反馈镇定[1)]

邓飞其 刘永清 冯昭枢
(华南理工大学自动化系 广州 510641)

**摘 要**

研究完全滞后系统的滞后状态反馈镇定. 通过建立关于时滞系统的新型渐近稳定性定理. 构造适当的 Lyapunov 泛函、利用矩阵 Riccati 代数方程,得到了完全滞后系统的滞后反馈镇定方法.

**关键词**: 滞后,稳定性定理, Lyapunov 泛函, Riccati 方程,滞后反馈镇定.

## 1 引言

由于观测、传递信号均需要时间,所以在许多实际系统中都存在滞后现象. 在某些实际系统中,信号可能是完全滞后的[1,2]. 这类系统称为完全滞后系统. 比较简单、典型的完全滞后系统有

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t-\tau). \tag{1}$$

在现有文献中尚未见到关于形如(1)式的滞后系统的镇定问题的研究. 本文通过建立时滞系统的稳定性定理,给出了一些基本的完全滞后系统的反馈镇定方法.

## 2 稳定性定理

考虑 RFDE($f$) 如下:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(t,\boldsymbol{x}_t),\ x_{t_0} = \phi. \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in R^n, t_0 \in R^+ = [0,+\infty), \phi \in C = C([-\tau,0],R^n), \forall t \in R^+$, $f: R \times C \to R^n$ 将 $C$ 中的有界集映为 $R^n$ 中的有界集, $f(t,0) = 0$. 关于记号 $\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{x}(t_0,\phi)(t)$ 见文[2].

**定理 1.** 若存在泛函 $D^0: R \times C \to R^n, V: R \times C \to R$ 及 $K$ 类函数 $\phi_1$, $\phi_2$, $\phi_3$, 使 $\forall \phi \in C$ 及(2)式的解 $\boldsymbol{x}_t$ 满足

i) $\|D^0(t,\phi)\| \geqslant \|\phi(0)\| - a|\phi|, 0 \leqslant a < 1$,

ii) $\phi_1(\|D^0(t,\boldsymbol{x}_t)\|) \leqslant V(t,\boldsymbol{x}_t), V(t_0,\phi) \leqslant \phi_2(|\phi|)$,

iii) $\dot{V}(t,\boldsymbol{x}_t) \leqslant -\phi_3(\|\boldsymbol{x}(t)\|)$,

---

1) 国家自然科学基金、霍英东高校青年教师基金、广东省自然科学基金资助的项目.
本文于1994年5月27日收到

则(2)式的零解一致渐近稳定。

证明。由于 $\phi_1,\phi_2\in K$,所以 $\forall\varepsilon>0$,有 $\delta=\delta(\varepsilon)(0<\delta<\varepsilon/2)$ 使 $\phi_2(\delta)<\phi_1(\varepsilon/(2b))$,其中 $b=1/(1-a)$. 于是对(2)式过$(t_0,\phi)$的解$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t_0,\phi)(t)$, 当 $|\phi|<\delta$ 时,

$$\phi_1(\|D^0(t,\boldsymbol{x}_t)\|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x}_t)\leqslant V(t_0,\boldsymbol{x}_{t_0})=V(t_0,\boldsymbol{\phi})$$
$$\leqslant\phi_2(\delta)<\phi_1(\varepsilon/(2b)),$$
$$\|D^0(t,\boldsymbol{x}_t)\|<\varepsilon/(2b),\ \|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant a|\boldsymbol{x}_t|+\varepsilon/(2b). \tag{3}$$

于是由文[3]的引理 2 得 $\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant|\phi|+\varepsilon/2<\varepsilon$,所以(2)式的零解一致稳定。

由于 (2) 式中 $f(t,\ \cdot)$ 将$C$中有界集映为 $R^n$ 中的有界集, 所以对(2)式的任意解 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t_0,\phi)(t),\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ 在$[t_0,+\infty)$上有界, 于是仿文[2]第 5 章定理 2.1 的证明可证得(2)式的零解的吸引性,因此定理 1 成立。

# 3 基本结果

考虑系统(1)的反馈镇定问题

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(t)\boldsymbol{x}(t-\tau)+B(t)\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{u}(t)=-K(t)\boldsymbol{x}(t-\tau). \tag{4}$$

设 $A(t),B(t),K(t)$ 为有界矩阵函数,记

$$\hat{A}(t)=A(t)-B(t)K(t),\ Q[\tau,\hat{A}(t),P]=\hat{A}^{\mathrm{T}}(t)P+P\hat{A}(t)+2\tau\hat{A}^{\mathrm{T}}(t)P\hat{A}(t), \tag{5}$$

则闭环系统(4)可写成

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\hat{A}(t)\boldsymbol{x}(t-\tau). \tag{6}$$

**定理 2.** 若存在正定常数阵 $P\in R^{n\times n}$ 使

i) $\lambda_M(Q[\tau,\hat{A}(t),P])\leqslant-q=\text{const.}<0$, (7)

ii) $\int_t^{t+\tau}\|\hat{A}(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant a=\text{const.},\quad\tau a<1$, (8)

则(6)式的零解全局一致渐近稳定。

证明。令 $D^0(t,\boldsymbol{x}_t)=\boldsymbol{x}(t)+\int_{t-\tau}^t\hat{A}(s+\tau)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s$, 定义

$$V(t,\boldsymbol{x}_t)=[D^0(t,\boldsymbol{x}_t)]^{\mathrm{T}}PD^0(t,\boldsymbol{x}_t)+\int_{t-\tau}^t\int_s^t[\hat{A}(u+\tau)\boldsymbol{x}(u)]^{\mathrm{T}}P[\hat{A}(u+\tau)\boldsymbol{x}(u)]\mathrm{d}u\mathrm{d}s,$$

则有 $V(t,\boldsymbol{x}_t)\geqslant[D^0(t,\boldsymbol{x}_t)]^{\mathrm{T}}PD^0(t,\boldsymbol{x}_t)\geqslant\lambda_m(P)\|D^0(t,\boldsymbol{x}_t)\|^2$. 因为

$$\left(\int_{t-\tau}^t\|\hat{A}(s+\tau)\|\mathrm{d}s\right)^2\leqslant\tau\int_{t-\tau}^t\|\hat{A}(s+\tau)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\tau a<1,$$
$$\|D^0(t,\boldsymbol{x}_t)\|\geqslant\|\boldsymbol{x}(t)\|-(\tau a)^{\frac{1}{2}}|\boldsymbol{x}_t|,$$

所以定理 1 的条件 i),ii) 得到满足。利用不等式 $2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$,有

$$\begin{aligned}\dot{V}=&\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[\hat{A}^{\mathrm{T}}(t+\tau)P+P\hat{A}(t+\tau)+\tau\hat{A}^{\mathrm{T}}(t+\tau)P\hat{A}(t+\tau)]\boldsymbol{x}(t)\\&+\int_{t-\tau}^t2[\hat{A}(t+\tau)\boldsymbol{x}(t)]^{\mathrm{T}}P\hat{A}(s+\tau)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\\&-\int_{t-\tau}^t[\hat{A}(s+\tau)\boldsymbol{x}(s)]^{\mathrm{T}}P[\hat{A}(s+\tau)\boldsymbol{x}(s)]\mathrm{d}s\\\leqslant&\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q[\tau,\hat{A}(t+\tau),P]\boldsymbol{x}(t)\leqslant-q\|\boldsymbol{x}(t)\|^2,\end{aligned}$$

所以定理 1 的条件 iii)得到满足．由定理 1 知，定理 2 成立．

## 4 单滞量时不变系统的镇定

考虑时不变完全滞后系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t-\tau) + Bu(t), \tag{9}$$

其中 $x \in R^n, u \in R^r, A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times r}$．当$(A,B)$完全可控，$(A,C)$可观测时，对正定加权矩阵 $R, Q = C^TC$，Riccati 矩阵方程

$$A^TP^0 + P^0A - P^0BR^{-1}B^TP^0 + Q = 0 \tag{10}$$

有唯一正定解 $P^0$，从而 $\hat{A} = A - BR^{-1}B^TP^0$ 稳定；当 $\tau < \lambda_m(Q + P^0BR^{-1}B^TP^0)/(2\|\hat{A}^TP^0\hat{A}\|)$时，$-Q - P^0BR^{-1}B^TP^0 + 2\tau\hat{A}^TP^0\hat{A} < 0$，于是有正定矩阵 $P = P^0$ 使

$$\hat{A}^TP + P\hat{A} + 2\tau\hat{A}^TP\hat{A} = -Q - P^0BR^{-1}B^TP^0 + 2\tau\hat{A}^TP^0\hat{A} < 0,$$

于是由定理 2 得以下定理：

**定理 3.** 若$(A,B)$完全可控，$\tau$ 满足

$$0 \leqslant \tau < \min[1/\|\hat{A}\|, \lambda_m(Q + P^0BR^{-1}B^TP^0)/(2\|\hat{A}^TP^0\hat{A}\|)], \tag{11}$$

则系统(9)由滞后状态反馈 $u(t) = -R^{-1}B^TP^0x(t-\tau)$ 镇定．

注 1．定理 3 表明：若时滞 $\tau$ 足够小，将系统(9)视为无滞后系统，采用 LQ 调节器 $u = -R^{-1}B^Tx$ 进行镇定是可以的．(11)式提供了这样一个时滞上限．

## 5 多滞量系统的镇定

考虑多滞量完全滞后系统

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{m} A_ix(t-\tau_i) + Bu(t), \tag{12}$$

其中 $A_i \in R^{n\times n}$，$B \in R^{n\times r}$，$0 \leqslant \tau_i \leqslant \tau$．引入滞后反馈

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{m} K_ix(t-\tau_i) - \sum_{i=m+1}^{m+s} K_ix(t-\tau_i), \tag{13}$$

其中 $\tau_{m+1}, \cdots, \tau_{m+s}$ 是新引入的非负滞量．$K_1, K_2, \cdots, K_{m+s}$ 是可调节矩阵，只须其和为一定矩阵即可．引入记号 $A_{m+1} = \cdots = A_{m+s} = 0$，

$$\hat{A}_i = A_i - BK_i,\ A = \sum_{i=1}^{m} A_i,\ \hat{A} = \sum_{i=1}^{m+s} \hat{A}_i = A - B\sum_{i=1}^{m+s} K_i. \tag{14}$$

设 $(A,B)$ 完全可控，$(A,C)$ 可观测，$P^0$ 是(10)式的正定解，$K_1, \cdots, K_{m+s}$ 满足

$$\sum_{i=1}^{m+s} K_i = R^{-1}B^TP^0. \tag{15}$$

此时，$\hat{A} = A - BR^{-1}B^TP^0$，稳定．

**定理 4.** 若$(A,B)$完全可控，滞量满足

$$\sum_{i=1}^{m+s} \tau_j\|\hat{A}_j\| < 1, \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{m+s} \tau_j(\|\hat{A}^{\mathrm{T}} P^0 \hat{A}\| + (m+s)\|\hat{A}_j^{\mathrm{T}} P^0 \hat{A}_j\|) < \lambda_m(Q + P^0 B R^{-1} B^{\mathrm{T}} P^0), \tag{17}$$

则当 $K_1, \cdots, K_{m+s}$ 满足式(15)时,系统(12)由滞后反馈(13)镇定。其中 $P^0$ 是(10)式的正定解。

证明。仿定理 3 证明可得。

注 2。定理 4 可用于特例

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad u(t) = -\sum_{i=1}^{s} K_i x(t-\tau_i). \tag{18}$$

文[4]曾研究 $s=1$ 的情形。本文中 $s$ 可为任何自然数,于是可据定理 4 设计(18)式的多级滞后反馈镇定方案,这是频域方法不容易得到的结果。

# 6 示例

考虑完全滞后系统

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t-\tau_1) + A_2 x(t-\tau_2) + Bu(t), \tag{19}$$

其中 $x = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$, $\tau_1 = 0.01$, $\tau_2 = 0.02$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A = A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

取 $R=1$, $Q=4I_{2\times2}$, 则 (10) 式的解为 $P^0 = [p_{ij}]_{2\times2}$, 其中 $p_{11}=6$, $p_{12}=p_{21}=p_{22}=2$. 取

$$K_1 = 0, \quad K_2 = [\,1 \quad 1\,], \quad K_3 = [\,1 \quad 1\,], \quad \tau_3 = 0.03,$$

则 $K_1 + K_2 + K_3 = [\,2 \quad 2\,] = R^{-1}B^{\mathrm{T}}P^0$, 条件(16),(17)满足。由定理 4,(19) 式由如下反馈律镇定:

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{3} K_i x(t-\tau_i) = -[x_1(t-0.02) + x_2(t-0.02) + x_1(t-0.03) + x_2(t-0.03)]. \tag{20}$$

## 参 考 文 献

[1] 刘永清,唐功友. 大型动力系统的理论与应用(3卷). 广州: 华南理工大学出版社,1992,1—11.
[2] Hale J K. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer- Verlag, 1977,1—10.
[3] 徐道义. 中立型泛函微分系统的稳定性. 数学学报,1992,35(5): 632—641.
[4] 张春曙,王浣尘. 线性系统时滞反馈镇定研究. 自动化学报,1992,18(5): 604—607.

# STABILIZATION OF COMPLETELY RETARDED SYSTEMS BY RETARDED FEEDBACKS

DENG FEIQI LIU YONGQING FENG ZHAOSHU
(*Department of Automation, South China University of Technology, Guangzhou* 510641)

ABSTRACT

In this paper, stabilization of completely retarded systems by retarded state feedbacks is investigated. A stabilization method by retarded feedbacks for completely retarded systems is developed with a new type of asymptotic stability theorem established for retarded systems, some Lyapunov functionals properly constructed and the algebraic matrix Riccati equations. The application of results of this paper is illustrated by an example at the end of the paper.

**Key words:** Delay, stability theorem, Lyapunov functional, Riccati equation, stabilization by retarded feedback.