



基于系统矩阵实 Schur 分解的 集结法模型降阶¹⁾

王炎生 陈宗基

(北京航空航天大学自动控制系 北京 100083)

摘 要

通过有序实 Schur 分解将系统矩阵变成分块对角阵, 得到一种数值稳定的集结法模型降阶, 并给出降阶的 L^∞ -误差界。降阶系统保留了原系统的主导极点且为最小实现。

关键词: 模型降阶, 集结法, 实 Schur 分解。

1 引言

模型降阶方法对简化高阶动态系统以及对由 H_∞ , LQG/LTR 等现代控制设计方法得到的高阶控制器进行降阶都是必要的。因为系统矩阵决定了系统的极点, 而对系统的稳定性、时间响应等性能影响大的是主导极点(即实部大的极点), 所以通过保留系统的主导极点可以达到降阶。

对 n 阶稳定系统 $\Sigma(A, B, C)$, 文献[1]对 A 作 Schur 分解得到上三角矩阵, 对角线元素恰好为 A 的全部特征根且按实部递减的顺序排列。记变换后的系统为 $\Sigma(A_s, B_s, C_s)$ 。其中

$$A_s = \begin{bmatrix} S_1 & S_{12} \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}, B_s = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C_s = [C_1, C_2]. \quad (1)$$

若 S_1 的特征根实部远远大于 S_2 的特征根实部, 选降阶系统为 $\Sigma(S_1, B_1 - S_{12}S_2^{-1}B_2, CA_s^{-1}B_s(S_1^{-1}(B_1 - S_{12}S_2^{-1}B_2))^+)$ 。当 A 有复特征根时, 这种方法将会导致状态空间实现含有复数, 不好处理。另外, 求逆和求广义逆会遇到数值病态问题。文献[2]利用系统矩阵的 Jordan 标准型进行了改进, 但得到 Jordan 标准型所用的相似变换是数值不稳定的。

本文对系统矩阵作有序实 Schur 分解将其化成分块上三角阵, 然后通过解一个 Sylvester 方程将其进一步化成一个对角分块矩阵。于是原系统可分为两个子系统之和, 以主导极点子系统作为降阶系统。这种模型降阶方法保留了原系统的主导极点, 同时还是一种集结法, 因而具有输出误差小的优点。最后, 本文还给出了降阶的 L^∞ -误差上界。

1) 博士后科学基金和航空科学基金资助项目。
本文于 1995 年 2 月 27 日收到

2 降阶算法和降阶系统

考虑完全可控且完全可观的 n 阶稳定系统 $\Sigma(A, B, C)$, 其中 $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times p}$, $C \in R^{q \times n}$, A 的特征根按实部递减顺序排列为, $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_n(A), \operatorname{Re}\{\lambda_k(A)\} \gg \operatorname{Re}\{\lambda_{k+1}(A)\}$, 则由文献[3]知, 存在正交矩阵 U , 使得 A 的有序实 Schur 分解为

$$S = U^T A U = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

其中 $A_1 \in R^{k \times k}$, $A_2 \in R^{(n-k) \times (n-k)}$, $\lambda_i(A_1) = \lambda_i(A), i = 1, 2, \dots, k$.

为使 S 变成分块对角矩阵, 对 S 作相似变换

$$V = \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}, X \in R^{k \times (n-k)}. \quad (3)$$

解 Sylvester 方程

$$A_1 X + A_{12} - X A_2 = 0, \quad (4)$$

得到 X , 则 $V^{-1} S V = \operatorname{diag}(A_1, A_2)$.

于是, 在变换 $T = UV$ 下, 原系统变成 $\Sigma(A_i, B_i, C_i)$,

其中

$$A_i = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C = [C_1, C_2]. \quad (5)$$

由于 U 为正交矩阵且解 Sylvester 方程是数值可靠的^[3], 所以变换 $T = UV$ 是数值稳定的.

记

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B = C_i(sI - A_i)^{-1} B_i, \quad (6)$$

$$G_1(s) = C_1(sI - A_1)^{-1} B_1, G_2(s) = C_2(sI - A_2)^{-1} B_2, \quad (7)$$

则有

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s). \quad (8)$$

取子系统 $\Sigma(A_i, B_i, C_i)$ 为降阶系统, 于是有定理 1.

定理 1. 用上述降阶算法得到降阶系统 $\Sigma(A_i, B_i, C_i)$, 则该算法是一种集结法, 降阶系统稳定, 完全可控且完全可观并保留了原系统的主导极点.

证明. 取集结矩阵为 $K = (I_k, 0) \in R^{k \times (n-k)}$, 则由

$$A_i K = [A_1, 0], K A_i = [A_1, 0], B_i = K B_i, C_i = C_i K^+ \quad (9)$$

知降阶算法为集结法. 而由 A_i 的取法知降阶系统稳定且保留了原系统的主导极点.

设 $\Sigma(A_i, B_i, C_i)$ 的可控 Gramian 和可观 Gramian 分别为 P_i 和 Q_i ,

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}, Q_i = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}, P_{11}, Q_{11} \in R^{k \times k}, \quad (10)$$

则有

$$A_1 P_{11} + P_{11} A_1^T + B_1 B_1^T = 0, A_1^T Q_{11} + Q_{11} A_1 + C_1^T C_1 = 0, \quad (11), (12)$$

由于 $\Sigma(A_i, B_i, C_i)$ 稳定, 完全可控且完全可观, 因此, 根据文献[4]知,

$$P, > 0, Q, > 0. \quad (13)$$

而 P_{11}, Q_{11} 分别为 $P,$ 和 $Q,$ 的主子块, 所以,

$$P_{11} > 0, Q_{11} > 0, \quad (14)$$

据此及文献[4]就知 $\Sigma(A_1, B_1, C_1)$ 完全可控且完全可观. 于是定理得证.

3 降阶算法的 L^∞ -误差界

$G(s)$ 和 $\Sigma(A, B, C)$ 的 Hankel 奇异值定义为

$$\sigma_i(G(s)) = \{\lambda_i(P, Q)\}^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

并且约定 $\sigma_i(\cdot) \geq \sigma_{i+1}(\cdot)$.

定理 2. 降阶算法的误差界为

$$\|G(j\omega) - G_1(j\omega)\|_{L^\infty} = \|G_2(j\omega)\|_{L^\infty} \leq 2 \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i^{\frac{1}{2}}(P_{22}Q_{22}), \quad (16)$$

且

$$\sum_{k+1}^n \sigma_i(G(s)) \leq \sum_1^{n-k} \sigma_i(G_2(s)) \leq \sum_1^{n-k} \sigma_i(G(s)). \quad (17)$$

证明. 根据文献[4]可知(16)式成立. 而由于 $Q, > 0$, 于是存在下三角矩阵 R , 使得

$$Q, = RR^T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11}^T & T_{21}^T \\ 0 & T_{22}^T \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

因此,

$$Q_{22} = T_{21}T_{21}^T + T_{22}T_{22}^T. \quad (19)$$

又 $T_{22}^T P_{22} T_{22}$ 为 $R^T P, R$ 的 $n - k$ 阶主子块, 而 $R^T P, R$ 与 $P, Q,$ 的特征根完全相同, 于是由文献[5]知,

$$\begin{aligned} \lambda_i(P_{22}Q_{22}) &\geq \lambda_i(T_{22}^T P_{22} T_{22}) \\ &\geq \lambda_{i+k}(P, Q), \quad i = 1, 2, \dots, n - k, \end{aligned}$$

据此易证(17)成立.

由于系统的 Hankel 奇异值不仅取决于 A , 还依赖于 B 和 C , 所以本文提出的降阶方法与平衡截尾降阶方法^[4]完全不同. 前者保留了原系统的主导极点, 输出误差小, 而后者则选取了可控性和可观性强的状态, 这两种方法可以互相补充. 同文献[4]一样, 通过先将不可控或不可观的状态去掉而对余下的子系统进行降阶, 本文的方法可推广到非最小实现系统.

参 考 文 献

- [1] Rachid A and Hashin G. Model reduction via Schur decomposition, *IEEE Trans.* 1992, **AC-37** (5): 666—668.
- [2] 王炎生, 陈宗基. 基于 Jordan 标准型的模型降阶, 1993 控制理论及其应用年会论文集, 北京: 海洋出版社, 41—47.
- [3] Golub G H and Van Loan C F. *Matrix Computation*. John Hopkins University Press, 1983, 219—226.
- [4] Glover K. All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their

L^∞ -error bounds, *Int. J. Control*, 1984, **39**(6): 1115—1193.

[5] Horn R A and Johnson C R. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985, 181—198.

AGGREGATION MODEL REDUCTION BASED ON REAL SCHUR DECOMPOSITION OF SYSTEM MATRIX

WANG YANSHENG CHEN ZONGJI

(*Dept. of Automatic Control, Beijing Univ. of Aero. & Astro., Beijing 100083*)

ABSTRACT

In this paper, by transforming the system matrix into a blocked diagonal matrix, it obtains an aggregation model reduction algorithm with numerical stability, and gives a L^∞ -error bound for model reduction. The reduced-order system retains the prominent poles and its realization is minimal.

Key words: Model reduction, aggregation method, real Schur decomposition.