第 22 卷 第 5 期 自 动 化 学 报 Vol. 22, No. 5
1996 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1996

短 文

时变时滞不确定系统的鲁棒无记忆控制[1)]

钟 锷 褚 健
(浙江大学工业控制研究所 杭州 310027)

摘 要

针对控制时滞系统存在时变时滞及参数摄动的情况，通过构造适当形式的 Lyapunov 函数，求得无记忆反馈控制律. 给出单滞后系统稳定化控制，并讨论具有指定衰减度的控制器设计，进而将结论推广到多重滞后系统.

关键词: Lyapunov 函数，控制时滞，无记忆反馈，时变时滞.

1 引言

对大时滞对象的控制，采用最优控制、有限谱配置等设计方法多较为复杂，且在对象时变及不确定的条件下鲁棒性分析有困难。文献[1,2]从保证系统稳定性出发，利用构造 Lyapunov 函数求解系统的无记忆反馈控制。它们研究系统不确定和时变特性的形式各有不同，但都以含状态滞后系统为对象，其结论并不适于控制滞后的系统。针对控制滞后系统的鲁棒控制问题，Klamka 讨论过时变对象的可控性[3]，文[4]分析了一定形式时变时滞对象的无时滞变换问题，文[5]将控制不确定动态系统的"Min-Max"方法[6]推广到控制滞后系统，即 MMPC (Min-Max Predictor Control). MMPC 由于借用了有限谱配置中的有记忆变换方法，因而是有记忆反馈控制律，需在线进行积分和矩阵指数运算，且保证其控制律存在的约束条件也过于复杂。

本文基于简化设计，保证鲁棒稳定，便于实际应用的设想，将无记忆反馈控制思想运用到控制滞后的时变不确定系统中，给出一种无记忆鲁棒控制器，并与 MMPC 方法比较。

2 单滞后系统控制器设计

2.1 稳定化控制器设计

考虑如下系统：

$$\dot{x}(t) = (A + F_0F_1(t))x(t) + (B_0 + E_0E_1(t))u(t) + (B_1 + H_0H_1(t))u(t - \theta(t)), \quad (1)$$

1) 霍英东青年教师基金、国家自然科学基金资助课题.
本文于 1994 年 2 月 3 日收到

其中 $x(\cdot)\in R^n, u(\cdot)\in R^m, A, B_0, B_1, F_0, E_0, H_0$ 为适当维数实常数矩阵，时变特性满足 $F_1^T(t)F_1(t)\leqslant r_1 I, E_1^T(t)E_1(t)\leqslant r_2 I, H_1^T(t)H_1(t)\leqslant r_3 I, r_1, r_2, r_3>0$，且 $\theta(t)$ 为时滞，满足 $\theta(t)>0$，$\dot\theta(t)\leqslant h<1$.

定理 1. 若时变时滞系统可由(1)式描述，且 $P\in R^{n\times n}$ 为方程

$$A^TP+PA+r_1I-PW_1P=-Q \tag{2}$$

正定解，$W_1=\alpha[(1-r_2-r_3)B_0B_0^T-(1-h)^{-1}B_1B_1^T-(\beta+r_2+r_3)\beta B_1B_1^T-(1+\beta)(E_0E_0^T+(1-h)^{-1}H_0H_0^T)]-F_0F_0^T$，且 $\alpha,\beta>0$，正定阵 $Q\in R^{n\times n}$ 均由设计者选定，则由

$$u(t)=-\alpha(B_0+\beta B_1)^TPx(t),\ \alpha,\beta>0 \tag{3}$$

确定的无记忆反馈控制保证闭环稳定. 证明参见附录 A.

与无时滞系统的标准 Riccati 方程相比，控制律中 $B_1B_1^T$ 一项反映反馈律中包含了时滞项影响. α,β 作为反馈系数由设计者调整. 变形 Riccati 方程有解的充要条件难于分析[1,2]，但可借鉴标准 Riccati 方程解存在性判定方法讨论方程(2)存在正定解 P 的充分条件.

推论 1. 若 (A, B) 能控，且摄动满足匹配条件 $B_1=BS_1$，$E_0=BS_E$，$H_0=BS_H$，$F_1=BS_F$，并可选 $\alpha,\beta>0$，使 $\alpha[(1-r_2-r_3)-(1-h)^{-1}S_1S_1^T-(\beta+r_2+r_3)\beta S_1S_1^T-(1+\beta)(S_ES_E^T+(1-h)^{-1}S_HS_H^T)]>S_FS_F^T$ 成立，则方程(2)必有唯一正定解 $P\in R^{n\times n}$.

实际应用中推论 1 要求的匹配条件不一定满足，推论 2 给出一个范数约束形式的控制律有解的充分条件.

推论 2. 若(A,B)能控，且 $(1-r_2-r_3)>0$，则存在 $P_0\in R^{n\times n}$ 是 Riccati 方程

$$A^TP_0+P_0A-\alpha(1-r_2-r_3)P_0B_0B_0^TP_0+r_1I=-Q_0 \tag{4}$$

唯一正定解，Q_0 是设计者选定的实对称正定阵. 若成立 $\alpha[(1-h)^{-1}+(\beta+r_2+r_3)\beta]\|B_1\|_2^2+\alpha(1+\beta)(\|E_0\|_2^2+(1-h)^{-1}\|H_0\|_2^2)+\|F_0\|_2^2\leqslant\lambda_{\min}(Q_0)\lambda_{\max}^{-2}(P_0)$，则定理 1 控制律必有解.

2.2 具有指定衰减度的控制器设计

若系统(1)时滞大小确定仅含参数摄动，可利用 Lyapunov 方法设计保证指定衰减度的控制器. 这里指定衰减度是指在过渡过程系统的状态至少按某指定系数收敛到稳态.

定理 2. 系统 (1) 若满足 $\theta(t)\equiv\theta$，且 P 为 $(A+\gamma I)^TP+P(A+\gamma I)+r_1I-PW_2P=-Q$ 的正定解，其中 $W_2=\alpha[(1-r_2-r_3)B_0B_0^T-e^{2\gamma\theta}B_1B_1^T-(\beta+r_2+r_3)\cdot\beta B_1B_1^T-(1+\beta)(E_0E_0^T+e^{2\gamma\theta}H_0H_0^T)]-F_0F_0^T$，$\alpha,\beta,Q$ 定义同定理 1，则(3)式控制律保证闭环系统 γ 衰减度稳定. 证明参见附录 A.

3　多重滞后对象控制器设计

考虑如下系统：

$$\dot x(t)=(A+F_0F_1(t))x(t)+\sum_{j=0}^{k}(B_j+H_{0j}H_{1j}(t))u(t-\theta_j(t)), \tag{5}$$

其中 $x(\cdot)\in R^n$，$u(\cdot)\in R^m$，A，B_j，F_0，H_{0j} 为适当维数实常数矩阵，时变特性满足

$F_1^{\mathrm{T}}(t)F_1(t) \leqslant r_f I, H_{1j}^{\mathrm{T}}(t)H_{1j}(t) \leqslant r_j I, r_f, r_j > 0, j = 0, \cdots, k$, 且 $\theta_j(t)$为时滞,满足

$$\theta_0(t) \equiv 0, \theta_j(t) > 0, \ \dot{\theta}_j(t) \leqslant h_j < 1, \ j = 1, \cdots, k. \tag{6}$$

定理 3. 系统(5) 如果存在 $P \in R^{n\times n}$ 是方程 $A^{\mathrm{T}}P + PA + r_f I - PW_3P = -Q$ 的正定解,其中

$$W_3 = \alpha[2\beta_0 B_0 B_0^{\mathrm{T}} - \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=0}^{k}((1-h_j)^{-1}I + B_i B_j^{\mathrm{T}} B_j B_i^{\mathrm{T}}) - \sum_{j=1}^{k}\beta_j(I + B_0 B_j^{\mathrm{T}} B_j B_0^{\mathrm{T}})$$

$$- \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\beta_j((1-h_j)^{-1}H_{0i}H_{0i}^{\mathrm{T}} + r_i B_j B_j^{\mathrm{T}})] - F_0 F_0^{\mathrm{T}},$$

则控制律

$$u(t) = -\alpha\sum_{j=0}^{k}\beta_j B_j^{\mathrm{T}} P x(t), \ \alpha, \beta_j > 0, \tag{7}$$

保证闭环稳定,其中 $\alpha, \beta_j > 0$,正定阵 $Q \in R^{n\times n}$ 均由设计者选定.

定理 4. 若 $\theta_j(t) \equiv \theta_j, j = 1, \cdots, k, P$ 为方程 $(A + \gamma I)^{\mathrm{T}}P + P(A + \gamma I) + r_f I - PW_4P = -Q$ 正定解,其中

$$W_3 = \alpha[2\beta_0 B_0 B_0^{\mathrm{T}} - \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=0}^{k} e^{\gamma\theta_j}(I + B_i B_j^{\mathrm{T}} B_j B_i^{\mathrm{T}}) - \sum_{j=1}^{k}\beta_j(I + B_0 B_j^{\mathrm{T}} B_j B_0^{\mathrm{T}})$$

$$- \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\beta_j e^{\gamma\theta_j}(H_{0i}H_{0i}^{\mathrm{T}} + r_i B_j B_j^{\mathrm{T}})] - F_0 F_0^{\mathrm{T}},$$

且 α, β_j, Q 定义同定理 3,则(7)式确定的控制律保证系统(5)闭环具有 γ 衰减度稳定.

定理 3,4 均可通过构造适当 Lyapunov 函数来证明,不再赘述.

4 仿真研究

讨论文[5]中的仿真例子

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.0 & -1.0\\ -1.25+\nu & 4.0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.0\\ 1.0\end{bmatrix}u(t-0.2), \tag{8}$$

并考虑初始条件及摄动变化为 $x(\xi) = [1.0, 1.0]^{\mathrm{T}}, \xi \leqslant 0$; $\nu(t) = 1.7\sin(\pi t)$. 根据定理1求解控制律. 图1、图2分别给出了闭环状态分量 $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ 在时间轴上回复轨迹,并与由文[5]中 MMPC 算法得到的轨迹对比,其中实线轨迹为本文算法结果. 可见,本文中的无记忆反馈控制算法不仅在线计算量少,控制效果也略优于 MMPC 方法.

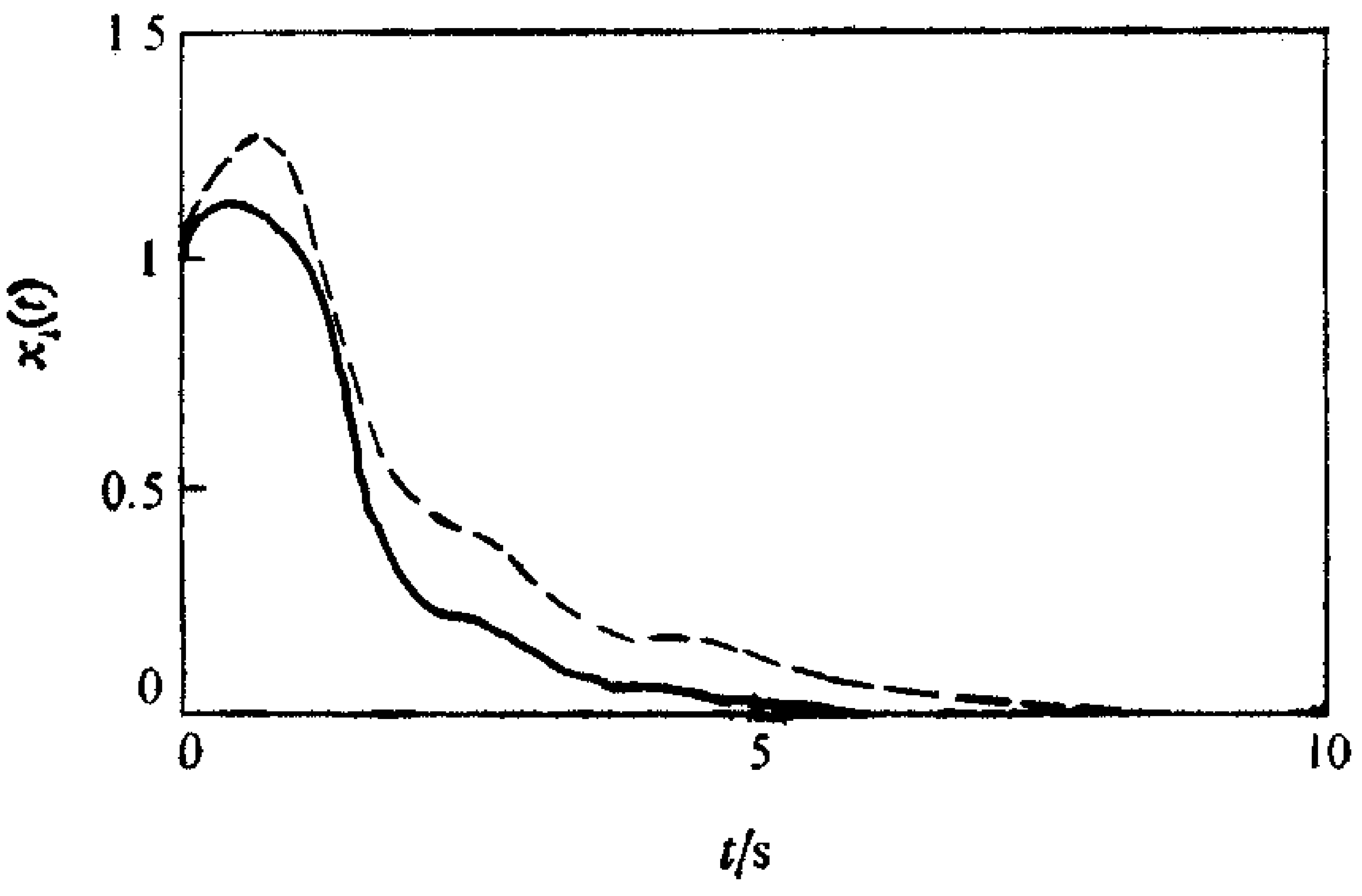

图 1

5 结语

本文中针对控制滞后时变不确定

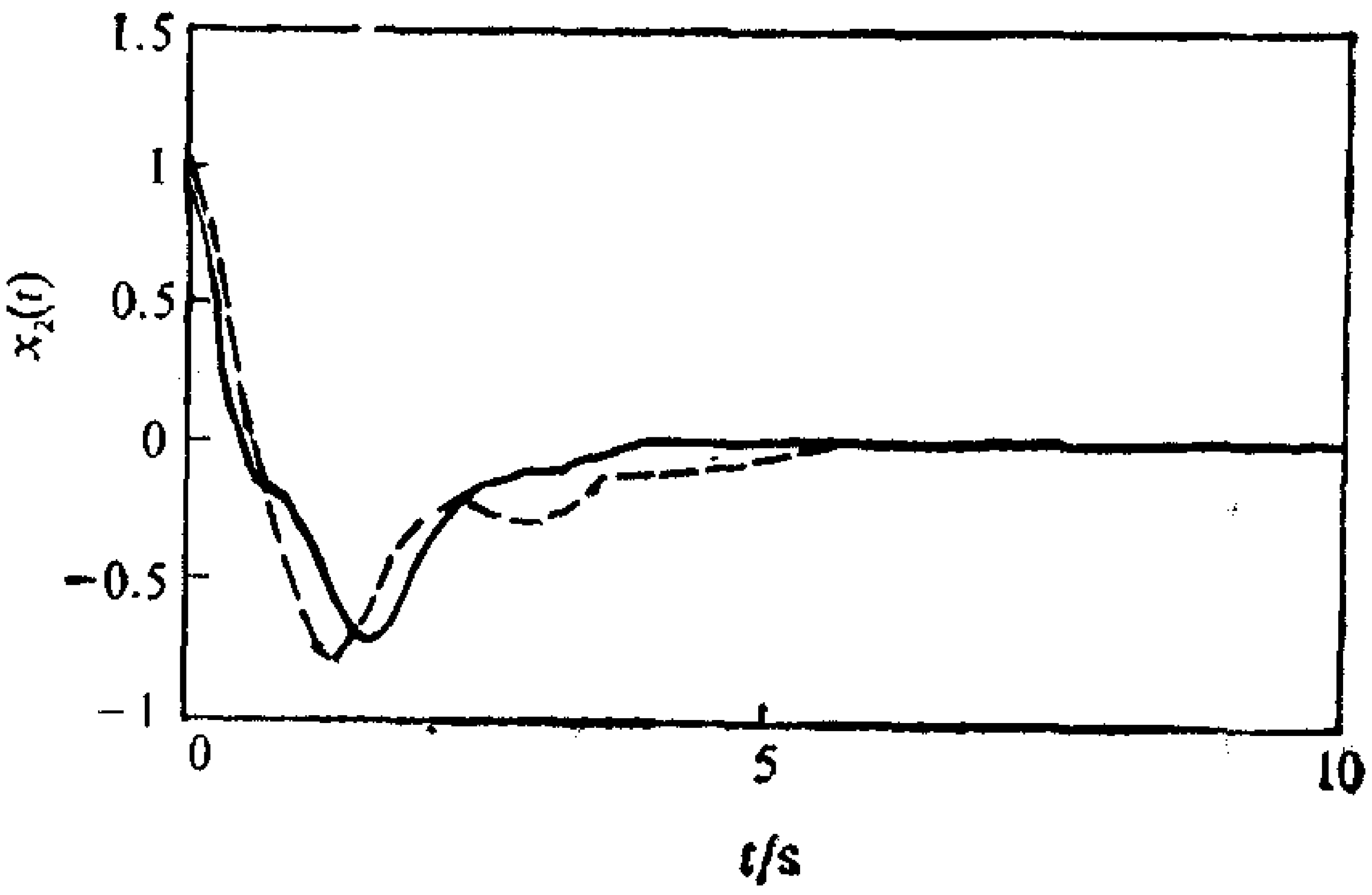

图　2

系统给出了无记忆控制器设计，具有以下主要特点：

1）在时变时滞及参数摄动条件下，保证闭环鲁棒稳定性；

2）无记忆反馈控制，在线计算量较小；

3）与 MMPC 等算法要求对象与控制参数满足多个约束条件的形式不同，本文中控制律存在的约束条件归结为一变形 Riccati 方程存在正定解，更为简洁、实用。

参　考　文　献

[1] 俞立．不确定线性时滞系统的稳定化控制器设计．控制理论与应用，1991，**8**(1)．

[2] Phoojuruenchanachai S, Furuta K. Memoryless stabilization of linear systems including time-varying state delays. *IEEE Trans*. 1992, **AC-37**(7): 1022—1026.

[3] Klamka J. Absolute controllability of linear systems with time-variable delays in control. *Int. J. Control*, 1977, **26**(1): 57—63.

[4] Zviartstein. Linear systems with delayed controls: a reduction. *IEEE, Trans*. **AC-27**(4).

[5] Cheres E, Palmor Z, Gutman S. Min-Max predictor control for uncertain systems with input delays. *IEEE Trans*. 1990, **AC-33**(2): 210—214.

[6] Gutman S, Palmor Z. Properties of min-max controlers in uncertain dynamical systems. *SIAM J. Contr. Optimiz*., 1982, **20**(6): 850—861.

附 录 A

定理 1 证明.

取 Lyapunov 函数为 $V(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{x}(t)+\int_{t-\theta(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)T\boldsymbol{x}(s)ds$, 其中 $T\in R^{n\times n}$ 为待定的正定矩阵. 在(3)式控制作用下,将 $V(t)$ 沿闭环系统关于时间求导,可得

$\dot{V}(t)\leqslant\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)T\boldsymbol{x}(t)-(1-h)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\theta(t))T\boldsymbol{x}(t-\theta(t)).$

取正定阵 $T=\alpha P[(B_0+\beta B_1)(B_0+\beta B_1)^{\mathrm{T}}+r_3B_0B_0^{\mathrm{T}}+\beta r_3B_1B_1^{\mathrm{T}}]P$,并代入上式, 可得

$$\dot{V}(t)\leqslant-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(Q+Q_1)\boldsymbol{x}(t)-\alpha(1-h)M_1^{\mathrm{T}}M_1\leqslant-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q\boldsymbol{x}(t)<0.$$

根据 Lyapunov 第二方法的稳定性判定律,知系统闭环稳定.

定理 2 证明.

首先构造变换: $\boldsymbol{z}(t)=e^{\gamma t}\boldsymbol{x}(t),\gamma>0$, 若 $\boldsymbol{z}(t)$ 稳定说明 $\boldsymbol{x}(t)$ 至少具有 γ 衰减度稳定. 并构造 Lyapunov 函数

$$V(t)=\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{z}(t)+\int_{t-\theta}^{t}\alpha\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(s)P[(B_0+\beta B_1)(B_0+\beta B_1)^{\mathrm{T}}+r_3B_0B_0^{\mathrm{T}}+\beta r_3B_1B_1^{\mathrm{T}}]P\boldsymbol{z}(s)\mathrm{d}s,$$

将函数 $V(t)$ 关于时间求导,参照定理 1 的证明方法, 可推得 $\dot{V}(t)\leqslant-\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)Q\boldsymbol{z}(t)<0$, 所以 $\boldsymbol{z}(t)$ 稳定,说明 $\boldsymbol{x}(t)$至少具有 γ 衰减度稳定.

MEMORYLESS ROBUST CONTROL FOR UNCERTAIN SYSTEMS WITH TIME VARYING DELAYS

ZHONG ER CHU JIAN
(*Industrial Control Institute, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

ABSTRACT

The problem of stabilizing uncertain dynamical systems with time varying delays in control is considered in this paper. By constructing proper Lyapunov functions, the memoryless feedback control laws are derived based on the Lyapunov second method. All the conclusions are extended from simple delay systems to multiple delay ones.

Key words: Delay in control, Lyapunov function, memoryless feedback, time varying delay.