第 23 卷 第 1 期
1997 年 1 月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 23, No. 1
January, 1997

短 文

一类非线性组合大系统的稳定性1)

盖如栋
（辽宁工程技术大学机器智能与控制研究所 阜新 123000）
井元伟 张嗣瀛
（东北大学自控系 沈阳 110006）

摘 要 本文研究一类比较广泛的非线性组合大系统的稳定性问题. 基于矩阵代数 Riccati 方程存在对称正定解的新判据(引理 2)，给出了检验这类非线性组合大系统稳定性的新准则，所给出的稳定性准则只涉及子系统的稳定性以及子系统之间的互联项，因此，当应用该准则检验这类非线性组合大系统的稳定性时，避免了构造子系统以及大系统的 Lyapunov 函数的困难.

关键词 非线性，大系统，稳定性.

1 引言

自六十年代以来，许多作者致力于研究非线性组合大系统的稳定性及其分散反馈镇定问题[2-9]，其研究成果形成了检验非线性大系统稳定性的 Lyapunov 方法，应用这些方法检验一个给定的非线性组合大系统的稳定性，必须构造子系统的 Lyapunov 函数和大系统的标量的 Lyapunov 函数[3,4]或向量 Lyapunov 函数[5,6]，从而将面临两个问题：第一是要构造子系统的 Lyapunov 函数，这通常是比较困难的；第二是对于子系统的 Lyapunov 函数的不同选择，所得到的结论可能是不同的，此外这些方法对于大系统的镇定问题来说没有直接的指导作用.

在本文中，我们讨论一类比较一般的非线性组合大系统的稳定性，并基于文[1]的思想，给出一个检验这类非线性组合大系统稳定性的准则，这一新的准则只涉及子系统的稳定性和子系统之间的耦合项，因而，应用这一准则检验一个给定的非线性组合大系统的稳定性时，不必构造子系统以及大系统的 Lyapunov 函数. 不仅如此，这一准则对于构造反馈控制律镇定这类非线性组合大系统也具有指导作用.

符号说明：$U(0,R^k)$表示 R^k 中包含原点的有界闭领域；$N(U,R^k)$和 $P(U,R^k)$分别表示在邻域 $U(\boldsymbol{x},R^k)$上原点处函数值等于零的非负函数、正定函数集合.

1) 本项目获国家自然科学基金和辽宁省博士科研起动基金资助.
收稿日期 1994-04-

2 问题描述及若干引理

考虑下面的有 N 个子系统构成的非线性组合大系统

$$\boldsymbol{x}_i = A_i\boldsymbol{x}_i + \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{f}_{ij}(\boldsymbol{x}_j), \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}_i \in R^{n_i}$, $1\leqslant i\leqslant N$,是第 i 个子系统的状态向量,A_i 是 $n_i\times n_i$ 矩阵,$\boldsymbol{f}_{ij}(\boldsymbol{x}_j)$是向量值连续函数. 并且 $f_{ij}(0)=0$. 在本节中,假设由

$$\boldsymbol{x}_i = A_i\boldsymbol{x}_i \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{2}$$

给出的每个系统都是渐近稳定的. 为寻找仅由系统本身的"元素"构成的判别准则,我们先给出下面的结果.

引理 1. 设矩阵 $A>0$,并且函数 $D(\boldsymbol{x})\in N(U,R^k)$. 如果 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}-D(\boldsymbol{x})\in P(U,R^k)$,那么,存在 $Q>0$ 使得 $A-Q>0$,并且 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{x}-D(\boldsymbol{x})\in P(U,R^k)$的充分必要条件是

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{D(x)}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}} = \alpha < 1. \tag{3}$$

证明从略.

根据文献[1]的引理可进一步得到如下结果:

引理 2. 设 $A\in R^n$,R、$Q>0$,那么存在对称正定矩阵 P,满足矩阵代数 Riccati 方程 $PA+A^{\mathrm{T}}P+PRP+Q=0$ 的充分必要条件是

$$\sigma(A) \subset C^- \qquad A^{\mathrm{T}}R^{-1}A - Q \geqslant 0.$$

3 主要结果

定理 1. 系统(1)的零解在 $U(x,R^n)$上渐近稳定的充分条件是:

1) $\sigma(A_i)\subset C^-$ $\quad 1\leqslant i\leqslant N$,

2) $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}}A_i\boldsymbol{x}_i-v_iD(\boldsymbol{x}_i)\in P(U_i,R^{n_i})$,

3) $\overline{\lim\limits_{x_i\to 0}}\dfrac{D_i(x_i)}{\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}}A_i\boldsymbol{x}_i}=\alpha_i<1$.

其中 $D_i(\boldsymbol{x}_i) = \sum\limits_{i=1}^{N}\boldsymbol{f}_{ji}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_i)\mathbf{f}_{ji}(\mathbf{x}_i)$,常数 v_i 是函数集合$(f_{ji}(x_i),1<j<N,)$中非零函数的个数 . $n = \sum\limits_{i=1}^{N}n_i$,$U_i = U \cap R^{n_i}$.

证明 根据条件 2),3)以及引理 1,存在 Q_i 使得 $A_i^{\mathrm{T}}A_i-Q_i>0$,并且 $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}Q_i\boldsymbol{x}_i-v_iD(\boldsymbol{x}_i)\in P(U_i,R^{n_i})$. 再根据条件 1) 和引理 2 可知,下列矩阵方程组

$$P_iA_i + A_i^{\mathrm{T}}P_i + v_iP_i^2 + Q_i = 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant N,$$

存在正定解 P_i. 令 $V(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}P_i\boldsymbol{x}_i$ 显然 $V(\boldsymbol{x}) \in P(U,R^k)$,且 $V(\boldsymbol{x})$ 沿方程(1) 轨迹的导数为

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{N}2(A_i\boldsymbol{x}_i+\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{f}_{ij}(\boldsymbol{x}_j))^{\mathrm{T}}P_i\boldsymbol{x}_i$$
$$=\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}(P_iA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_i)\boldsymbol{x}_i+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}2\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}P_if_{ij}(\boldsymbol{x}_j)).$$

利用不等式

$$2\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}P_i\,\boldsymbol{f}_{ij}(\boldsymbol{x}_j)\leqslant\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\,P_i^2\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{f}_{ij}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{f}_{ij}(\boldsymbol{x}_j)\qquad 1\leqslant i,j\leqslant N$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}\leqslant\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}(P_iA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_i+v_iP_i^2)\boldsymbol{x}_i+\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{f}_{ij}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{f}_{ij}(\boldsymbol{x}_j))$$
$$<\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}(P_iA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_i+v_iP_i^2+Q_i)\boldsymbol{x}_i=0.$$

由此可见,系统(1)的零解在$U(\boldsymbol{x},R^n)$上渐近稳定的.

定理 2. 系统(1)的零解在$U(\boldsymbol{x},R^n)$上渐近稳定的充分条件是:

1′) $\sigma(A_i)\in C^-\qquad 1\leqslant i\leqslant N$,

2′) $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}}A_i\boldsymbol{x}_i-v_i'\,D'(\boldsymbol{x}_i)\in P(U_i,R^{n_i})$,

3′) $\lim\limits_{x_i\to 0}\dfrac{D_i'(x_i)}{\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}}A_i\boldsymbol{x}_i}=\alpha_i<1$

其中$v_{ij}=\dfrac{1}{w_{ij}}$是满足条件$\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}}A_i\boldsymbol{x}_i-\dfrac{1}{v_i'}D_i'(\boldsymbol{x}_i)\in P(U_i,R^{n_i})$的正数,$D_i'(\boldsymbol{x}_i)=\sum\limits_{i=1}^{N}w_{ji}\boldsymbol{f}_{ji}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_i)$ $\boldsymbol{f}_{ji}(\boldsymbol{x}_i)$,$v_i'=\sum\limits_{i=1}^{N}v_{ji}$.

4 结论

前面我们以定理的形式给出了关于系统(1)稳定性的判别准则. 其优点在于该准则仅由系统自身的"元素",即子系统的系统矩阵,子系统之间的耦合项以及控制矩阵所组成,不含有象前面所提到的 Lyapunov 方法的不确定因素. 此外,本文的结果还可用于非线性组合大系统的鲁棒(Robust)稳定性分析和鲁棒分散镇定问题的研究.

参 考 文 献

[1] Gai Rudong, Zhang Siying. Stability of linear large scale composite systems. Proc. of The ACC, Baltimore, Maryland. 1994. 2207—2211.

[2] Bailey F N. The application of Lyapunov's second method to interconnected systems. *J. SIAN Cont. Ser.*, 1996. **A3**:443—462.

[3] Araki M, Kondo B. Stability and transient be havior of composite nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut.*, 1972, **AC-17**: 537—541.

[4] Michel A N. Porter D W. Stability analysis of composite systems, *IEEE Tran. Aut., Contr.*, 1972, **AC-17**: 111—116.

[5] Silijak D D. Stability of large scale systems. Proc. 5th IFAC World Congress (Paris, France), 1972.

[6] Matrosor V M. Method of Lyapunov vecoter functions in feedback systems. *Aut. Remote Cont.*, 1972, **33**: 1458—1469.

[7] Michel A N. Stability analysis of stochstic large-scale systems. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1975a, **55**: 93—105.

[8] Michel A N. Stability and trajectory Behavior of composite systems. *IEEE Trans. Cir. Syst.*, 1975b, **CAS-22**: 305—312.

[9] Araki M. Stability of large-scale nonlinear systems-quadraticorder theory of composite system method using M-matrices. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 1978, **AC-23**: 129—142.

STABILITY OF A CLASS OF NONLINEAR LARGE SCALE COMPOSITE SYSTEMS

GAI RUDONG

(Institue of Machine Intelligent and control, Liaoning Engineering Technology University, Fuxin 123000)

JING YUANWEI ZHANG SIYING

(Department of Automatic Control, Northeastern University, Shenyang 110006)

Abstract In this paper the stability foir a more general class of nonlinear large scale composite systems are considered. Based on Lemma 2 in this paper, two new stability criteria for this class of systems is given. Since the obtained stability criteria in this paper is only associated with the stability of the subsystems and the coupled terms among these subsystems, therefore, the difficulty to find Lyapunov functions of the nonlinear large scale composite system and its subsystems can be overcome for checking the stability of the large scale composite system by these two stability criteria.

Key words Nonlinear, large scale composite systems, stability.