短　文

奇异系统的输出稳定化通过一般状态反馈的可解性

谭连生　　范文涛
（中国科学院武汉数学物理研究所　武汉　430071）

摘　要　讨论了奇异系统的输出稳定化问题，得到了在初始值为容许且不保证闭环正则的情形下，通过一般状态反馈求解此问题的充要条件及计算步骤.

关键词　奇异系统，输出稳定化，一般状态反馈，Drazin 逆，广义不变子空间.

1　引言

若 $X=R^n, U=R^m, Y=R^p$，奇异系统

$$\theta: \quad \begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0-) = x_0, \\ y(t) = Dx(t). \end{cases}$$

式中　$E, A: X \to X, B: U \to X, D: X \to Y$ 为线性映射，E 为奇异的. E, A 满足正则束条件.

所谓输出稳定化问题，即寻求一般状态反馈 $u(t) = -Fx(t)$ 使闭环系统

$$\theta_F: \quad \begin{cases} E\dot{x}(t) = (A - BF)x(t),\ x(0-) = x_0, \\ y(t) = Dx(t) \end{cases}$$

满足 $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

文[1]率先讨论了脉冲能控奇异系统的输出稳定化问题，文[2]给出了在能量受限情况下达到输出稳定的条件. 文[3]得到了利用 MPD 反馈[4]来求解的充要条件，但遗憾的是 MPD 反馈对系统的噪声有放大的作用.

2　几点准备

设 P_1 为一可逆矩阵，使

$$P_1^{-1}EP_1 = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

收稿日期　1993-04-08

det $M\neq 0$, Q 为幂零的，记

$$V=\begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad W=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

那么矩阵 $\widetilde{E}=P_1VP_1^{-1}$ 称为 E 的 Drazin 逆.

记u $\triangleq ImV$, $\mathscr{N}\triangleq Ker\ V$，注意到 $\mathscr{N}=Ker\ \widetilde{E}=Ker\ E\widetilde{E}$，u $=\mathrm{Im}E\widetilde{E}$. 若 $K\triangleq \dim\mathscr{N}$，那么 Q 是 $k\times k$ 矩阵，$E\widetilde{E}$ 为从 X 到 μ 的投影，$(I-E\widetilde{E})$ 为从 X 到 $\mathscr{N}$ 的投影.

若 E,A 满足正则束条件，容许控制 $u(t)\in U$ 为 k 次连续可微的，那么方程 $E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$ 的可能初始点为

$$x_0=E\widetilde{E}q+(I-E\widetilde{E})\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r(E\widetilde{A})^r\widetilde{A}Bu^{(r)}(0). \tag{1}$$

式中　$u^{(r)}(0)$ 为 $u(t)$ 在 $t=0$ 处的第 r 阶导数，方程的解为

$$x(t;E\widetilde{E}q,Bu(t))=[\exp(\widetilde{E}At)]E\widetilde{E}q+\widetilde{E}\int_0^t\exp(\widetilde{E}A(t-s))Bu(s)ds$$
$$+(I-E\widetilde{E})\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r(E\widetilde{A})^r\widetilde{A}Bu^{(r)}(t). \tag{2}$$

定义 1.　设 $E,A:X\to X$，$\widetilde{E}$ 为 E 的 Drazin 逆，$B:U\to X$，对于子空间 $V\subseteq X$，如果存在一个映射 $F:X\to U$，使得

$$\widetilde{E}(A-BF)V\subseteq V, \tag{3}$$

则称 V 为奇异系统 Q 的广义 $(\widetilde{E}A,\widetilde{E}B)$ 不变子空间. 把 X 的 $(\widetilde{E}A,\widetilde{E}B)$ 不变子空间所组成的类表示为 $\mathscr{T}(\widetilde{E}A,\widetilde{E}B;X)$，把满足(3)的映射 $F:X\to U$ 所组成的类记为 $\mathscr{F}(\widetilde{E}A,\widetilde{E}B;X)$.

引理 1.　设 $V\subseteq X$，则 $V\in\mathscr{T}(\widetilde{E}A,\widetilde{E}B;X)$ 的充分必要条件为 $(\widetilde{E}A)V\subseteq V+\mathrm{Im}(\widetilde{E}B)$.

定理 1.　$Ker\ D$ 中包含唯一的一个最大 $(\widetilde{E}A,\ \widetilde{E}B)$ 不变子空间，记为

$$V^*\triangleq\sup\mathscr{T}(\widetilde{E}A,\widetilde{E}B;Ker\ D).$$

3　输出稳定化的可解条件

设 $\alpha_{\widetilde{E}A}(\lambda)$ 表示对应 $\widetilde{E}A$ 的最小多项式，记 $\alpha_{\widetilde{E}A}(\lambda)\triangleq\alpha^+_{\widetilde{E}A}(\lambda)\alpha^-_{\widetilde{E}A}(\lambda)$，$\alpha^+_{\widetilde{E}A}(\lambda)$，$\alpha^-_{\widetilde{E}A}(\lambda)$ 的零点分别在 C^+,C^- (C^+,C^- 分别为闭的右半复平面，开的左半复平面). 记 $x^+(\widetilde{E}A)\triangleq Ker\ \alpha^+_{\widetilde{E}A}(\widetilde{E}A)$，$<\widetilde{E}A|\mathrm{Im}(\widetilde{E}B)>\triangleq\mathrm{Im}(\widetilde{E}B)+(\widetilde{E}A)\mathrm{Im}(\widetilde{E}B)+\cdots+(\widetilde{E}A)^{n-1}\mathrm{Im}(\widetilde{E}B)$.

引理 2.　若闭环系统 Q_F 为正则奇异的，且其初始值为 $x_0=E\widetilde{E}q$，则其唯一状态解为

$$x(t)=[\exp(\widetilde{E}(A-BF)t)]E\widetilde{E}q. \tag{4}$$

引理 3.　$\lim\limits_{t\to+\infty}D[\exp(\widetilde{E}(A-BF)t)]E\widetilde{E}q=0$ 等价于 $x^+(\widetilde{E}A-\widetilde{E}BF)\subseteq Ker\ D$.

引理 4.　设 V 是任意满足 $\widetilde{E}AV\subseteq V$ 的子空间，记 $\overline{X}=X/V$，令 $P:X\to X/V$ 是标准投影，记 $\overline{\widetilde{E}A}$ 为 $\overline{X}$ 中诱导映射，那么 $\overline{X}^+(\overline{\widetilde{E}A})=PX^+(\widetilde{E}A)$.

定理 2.　系统 Q 输出稳定通过一般状态反馈，可解的充分必要条件为　$X^+(\widetilde{E}A)\subseteq <\widetilde{E}A|Im(\widetilde{E}B)>+V^*$，其中 $\widetilde{E}$ 为 E 的 Drazin 逆，$V^*=\sup\mathscr{T}(\widetilde{E}A,\widetilde{E}B,Ker\ D)$.

4 算法步骤

1) 计算 $\widetilde{E}$.

设 O 是 E 的重数为 l 的特征值，非零特征值为 λ_i，重数为 n_i，$i=1,2,\cdots,r$，那么 $m=\sum_{i=1}^{r} n_i$，$m+l=n$. 多项式 $p(\lambda)=\lambda^l(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\cdots+\alpha_{m-1}\lambda^{m-1})$的 m 个系数 $\alpha_i(i=0\sim m-1)$由

$$P(\lambda_i)=\frac{1}{\lambda_i},$$

$$P'(\lambda_i)=-\frac{1}{\lambda_i^2},$$

$$\vdots$$

$$P^{(n_i-1)}(\lambda_i)=\frac{(-1)^{n_i-1}(n_i-1)!}{(\lambda_1)^{n_i}}$$

所决定，从而 $\widetilde{E}=P(E)$.

2) 计算 $X^+(\widetilde{E}A)$，$<\widetilde{E}A|Im(\widetilde{E}B)>$，$V^*=\sup\mathscr{T}(\widetilde{E}A,\widetilde{E}B;Ker\ D)$.

令 $\mathscr{V}_\mu=Im\ V_\mu$，而 V_0 是 $DV_0=0$ 的一个最大解，又设 $W_\mu[\widetilde{E}B,V_{\mu-1}]=0$，$\mu=1,2,\cdots$，的最大解为 W_μ，而由方程

$$\begin{bmatrix} D \\ W_\mu(\widetilde{E}A) \end{bmatrix} V_\mu=0,\quad \mu=1,2,\cdots$$

的最大解得到 V_μ，$\mathscr{V}_\mu\subseteq\mathscr{V}_{\mu-1}$，即经检验有

$$\operatorname{rank}[V_{\mu-1},V_\mu]=\operatorname{rank} V_{\mu-1}.$$

当 $\mathscr{V}_\mu=\mathscr{V}_{\mu-1}$时，即 $\operatorname{rank}V_\mu=\operatorname{rank} V_{\mu-1}$时，递推结束.

3) 判断 $X^+(\widetilde{E}A)\subseteq<\widetilde{E}A|Im(\widetilde{E}B)>+V^*$.

4) 计算 F.

先定出 $\overline{F}_1:X/V^*\to U$，由 $F_1=\overline{F}_1P$ 得 F_1. F_0 应使 $W_0^*(\widetilde{E}A-\widetilde{E}BF_0)V^*=0$，由 $F=F_0+F_1$ 得到 F.

5) 验证闭环正则性.

参 考 文 献

[1] 杨成梧，邹云．脉冲能控广义系统的输出稳定化．控制与决策，1989，**1**：44—45.

[2] 谭连生．奇异系统能量受限的输出调节通过一般状态反馈的可解性．控制理论与应用，1993，**10**(6)：724—727.

[3] 杨成梧，邹云．广义系统的输出稳定化通过 MPD 反馈的可解性．控制理论与应用，1989，**6**(1)：43—50.

[4] Zheng Zhou, Mark A. Shayman and Tyzh-Jong Tarn, Singular Systems: a new approach in the time domain. *IEEE Trans. On Automatic Control*, 1987, **32**(1): 42—50.

[5] Wonham W M. Linear multivariable control: A geometric approach, 2nd. ed. New York: Springer-Verlag, 1979.

[6] Tan Liansheng(谭连生). On disturbance localization in singular systems with direct feedthrough. *International Journal of SYSTEMS SCIENCE*. 1995, **26**(11): 2235—2244.

ON THE SOVABILITY OF THE OUTPUT STABILIZATION PROBLEM OF SINGULAR SYSTEMS VIA GENERAL STATE FEEDBACK

TAN LIANSHENG FAN WENTAO

(*Wuhan Institute of Mathematical Sciences, Academia Sinica, Wuhan* 430071, *PR CHINA*)

Abstract This paper is devoted to the study of the sovability of the output stabilization problem of singular systems via general state feedback. When the initial values of the singular system are admissible, a sufficient and necessary condition for the sovability of this problem, with no guarantee of the regularity of the closed-loop system, has been proposed. The algorithm for this problem has also been developed.

Key words singular system, the output stabilization, state feedback, the Drazin inverse, the general invariant subspace.