短 文

确保状态估计性能的离散时间鲁棒 Kalman 滤波器

奚 宏 生
(中国科技大学自动化系　合肥　230027)

摘　要

讨论了一类具有不确定噪声的离散时间线性系统的鲁棒 Kalman 滤波器的设计思想和方法. 文中给出确保估计误差性能指标的不确定噪声协方差矩阵的扰动上界，并在此界限内采用最坏情况下的最优滤波器实现对状态的估计，它不仅能极小化不确定下的最坏性能，而且还能确保估计误差性能指标达到给定的某个自由度.

关键词: 离散时间系统，不确定噪声，确保估计性能.

1　问题的描述

设受到不确定噪声影响的随机系统为

$$x_{k+1} = Ax_k + w_k^0, \tag{1}$$

$$y_k = Cx_k + v_k^0. \tag{2}$$

其中 $x_k \in R^n$; $y_k \in R^m$; $A \in R^{n\times n}$; $C \in R^{m\times n}$; w_k^0, v_k^0 都是零均值及相互独立的 n 和 m 维白噪声序列，它们的协方差矩阵是不确定的，并满足

$$\mathrm{Cov}[w_k^0, w_s^0] = W^0\delta_{k,s} = (W + \Delta W)\delta_{k,s},\ W \geqslant 0,\ \Delta W \geqslant 0,$$

$$\mathrm{Cov}[v_k^0, v_s^0] = V^0\delta_{k,s} = (V + \Delta V)\delta_{k,s},\ V > 0\ \Delta V \geqslant 0.$$

当噪声不扰动时，协方差矩阵为 W 和 V，并假设: (1) (A, C) 是能检测的; (2) $(A, W^{\frac{1}{2}})$ 是能稳定的. 此时采用标准 Kalman 滤波器形式[1,2]

$$\hat{x}_{k+1,k} = A\hat{x}_{k,k-1} + K(y_k - C\hat{x}_{k,k-1}), \tag{3}$$

$$K = APC^\tau(CPC^\tau + V)^{-1}, \tag{4}$$

$$P = (A - KC)P(A - KC)^\tau + W + KVK^\tau. \tag{5}$$

对状态进行估计，能使估计误差性能指标 $J = t_r[P]$ 达到极小. 当 $\Delta W \neq 0$, $\Delta V \neq 0$ 时，文献 [3] 已证明了在假设 (1)，(2) 下，对应于 (W^0, V^0) 的估计误差方差矩

本文于 1994 年 6 月 25 日收到

阵收敛到 P^0，并满足代数 Riccati 方程

$$P^0=(A-KC)P^0(A-KC)^\tau+W^0+KV^0K^\tau, \tag{6}$$

其估计性能指标为 $J[K,W^0,V^0]=t_r[P^0]$. 记由矩阵对 $(\Delta W,\Delta V)$ 扰动而导致的估计误差性能指标对理想值的偏离度为

$$\Delta J(K,\Delta W,\Delta V)=t_r[P^0]-t_r[P]=t_r[\Delta P]\leqslant r, \tag{7}$$

其中 r 是根据实际情况设定的允许偏离度上界，$\Delta P=P^0-P$. 由 (5) 和 (6) 式知，ΔP 的表达式为

$$\Delta P(K,\Delta W,\Delta V)=\sum_{i=0}^{\infty}(A-KC)^i(\Delta W+K\Delta VK^\tau)(A-KC)^{\tau i}. \tag{8}$$

设有界闭凸集 $\Omega=\{(\Delta W,\Delta V):0\leqslant\Delta W\leqslant\Delta W^M,\ 0\leqslant\Delta V\leqslant\Delta V^M\}$. 显然，对任意 $(\Delta W,\Delta V)\in\Omega$，$\Delta J(K,\Delta W,\Delta V)$ 是 Ω 到 R^1 关于 $(\Delta W,\Delta V)$ 的线性映射，并具有以下性质.

性质 1. 对任意 $(\Delta W_i,\Delta V_i)\in\Omega(i=1,2)$，若 $\Delta W_1\leqslant\Delta W_2$，$\Delta V_1\leqslant\Delta V_2$，则 $\Delta J(K,\Delta W_1,\Delta V_1)\leqslant\Delta J(K,\Delta W_2,\Delta V_2)$.

性质 2. 对任意 $(\Delta W_i,\Delta V_i)\in\Omega(i=1,2)$，若 $\Delta W=\alpha\Delta W_1+(1-\alpha)\Delta W_2$，$\Delta V=\alpha\Delta V_1+(1-\alpha)\Delta V_2$，$0<\alpha<1$，则

$$\Delta J(K,\Delta W,\Delta V)\leqslant\max\{\Delta J(K,\Delta W_1,\Delta V_1),\ \Delta J(K,\Delta W_2,\Delta V_2)\}.$$

性质 3. 若记 $r=\max\limits_{(\Delta W,\Delta V)\in\Omega}\Delta J(K,\Delta W,\Delta V)$，则 r 必被 Ω 中 $(\Delta W^M,\Delta V^M)$ 达到.

从鲁棒估计的基本观点出发去构造一个最大有界闭凸集 Ω^*，当 $(\Delta W,\Delta V)\in\Omega^*$ 时，能确保 (7) 式恒成立，并在此界限内采用极小极大鲁棒估计器来极小化不确定下的最坏性能.

2 不确定噪声协方差矩阵的扰动上界

2.1 非结构扰动的界

记 $\|[\cdot]\|_2=\lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}[[\cdot][\cdot]^\tau]$，设 $\|\Delta W\|_2\leqslant a$，$\|\Delta V\|_2\leqslant b$ 等价于 $0\leqslant\Delta W\leqslant aI_n$，$0\leqslant\Delta V\leqslant bI_m$，令 $\Delta W^M=aI_n$，$\Delta V^M=bI_m$，代入 (8) 式，并由 ΔJ 的性质 3，得到

$$r=at_r[D]+bt_r[G]. \tag{9}$$

其中 D,G 分别满足代数 Riccati 方程

$$D=(A-KC)D(A-KC)^\tau+I_n,$$
$$G=(A-KC)G(A-KC)^\tau+KK^\tau.$$

引理 2.1. 设 F 是稳定方阵，$U\geqslant0$，$t_r[U]>0$，X 是代数 Riccati 方程

$$X=FXF^\tau+U$$

的解，则 $t_r[X]>0$.（证明略）

显然 $t_r[D]>0$，由于 $(A-KC)$ 是稳定方阵，$K=(k_{ij})_{n\times m}$ 是非零矩阵，

$$t_r[KK^\tau] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k_{ij}^2 > 0,$$

故 $t_r[G] > 0$.

令 $\Pi(a,b) = \{(\|\Delta W\|_2, \|\Delta V\|_2): 0 \leqslant \|\Delta W\|_2 \leqslant a, 0 \leqslant \|\Delta V\|_2 \leqslant b\}$ 是定义在线性约束(9)式上的有界闭凸集类，要寻求一个使（$\|\Delta W\|_2$, $\|\Delta V\|_2$）自由扰动范围达到最大的集,等价于求解问题

$$at_r[D] + bt_r[G] = r,\ \max\{ab\},\ a > 0,\ b > 0.$$

利用 Lagrange 乘子法可直接解得最大值点为

$$a^* = \frac{r}{2t_r[D]},\ b^* = \frac{r}{2t_r[G]}.$$

矩阵对谱模（$\|\Delta W\|_2$, $\|\Delta V\|_2$）的最大扰动界为

$$\Pi^* = \{(\|\Delta W\|_2, \|\Delta V\|_2): 0 \leqslant \|\Delta W\|_2 \leqslant a^*,\ 0 \leqslant \|\Delta V\|_2 \leqslant b^*\},$$

可拓扑等价地转化为（ΔW, ΔV）的最大扰动界

$$\Omega_0^* = \{(\Delta W, \Delta V): 0 \leqslant \Delta W \leqslant a^* I_n,\ 0 \leqslant \Delta V \leqslant b^* I_m\}.$$

定理 2.1. 在假设(1),(2)下，系统(1),(2)若采用滤波增益(4)式和状态估计器(3)式,则存在矩阵对（ΔW,ΔV）的最大自由扰动集 Ω_0^*，当（ΔW, ΔV）$\in \Omega_0^*$ 时，能确保(7)式恒成立.

2.2 结构扰动的界

设 w_k^0 和 v_k^0 各自的分量也是相互独立的,即

$$W^0 = W + \Delta W = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_2^0 & & 0 \\ & \varepsilon_2^0 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \varepsilon_n^0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$V^0 = V + \Delta V = \begin{bmatrix} \delta & & 0 \\ & \delta_2^2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \delta_m^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1^0 & & 0 \\ & e_2^0 & \\ & & \ddots \\ 0 & & e_m^0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

其中 $\sigma_j^2(j = 1, 2, \cdots, n)$ 和 $\delta_t^2(t = 1, 2, \cdots, m)$ 分别是在噪声不扰动情况下各分量的方差；ε_j^0 和 e_t^0 是非负扰动参数. 若记 $W_j(V_t)$ 是第 j 个(第 t 个)对角元素为 1，其他元素均为零的 n 阶(m 阶)方阵，则 $\Delta W = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^0 W_j$, $\Delta V = \sum_{t=1}^{m} e_t^0 V_t$. 将其代入(8)式，可得

$$\Delta J(K, \Delta W, \Delta V) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^0 t_r[D_j] + \sum_{t=1}^{m} e_t^0 t_r[G_t],$$

式中 D_j 和 G_t 分别满足代数 Riccati 方程

$$D_j = (A - KC)D_j(A - KC)^\tau + W_j,\ j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$G_t = (A - KC)G_t(A - KC)^\tau + KV_tK^\tau,\ t = 1, 2, \cdots, m.$$

由引理 2.1 知 $t_r[D_j] > 0$，对任意 $t_0(1 \leqslant t_0 \leqslant m)$，若 K 的第 t_0 列是非零向量，则

$t_r[KV_{t_0}K^\tau] = \sum_{j=1}^{n} k_{jt_0}^2 > 0$；否则 $KV_{t_0}K^\tau = 0$，对应的 $G_{t_0} = 0$，此时 $e_{t_0}^0$ 的扰动对 ΔJ 没有贡献，因此 $e_{t_0}^0$ 不受约束。不妨仅考虑 K 的每一列向量均为非零情况下 e_t^0 的扰动界。

令 $\Delta W^M = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j W_j$，$\varepsilon_j^0 \leqslant \varepsilon_j$；$\Delta V^M = \sum_{t=1}^{m} e_t V_t$，$e_t^0 \leqslant e_t$。将其代入(8)式，并由 ΔJ 的性质可得

$$r = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j t_r[D_j] + \sum_{t=1}^{m} e_t t_r[G_t]. \tag{12}$$

采用类似于 2.1 中的方法，在约束(12)式下，寻求一个使矩阵对 $(\Delta W, \Delta V)$ 自由扰动的范围达到最大的集，归结为求解问题

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j t_r[D_j] + \sum_{t=1}^{m} e_t t_r[G_t] = r;\ \max(\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n e_1 e_2\cdots e_m),$$

$$\varepsilon_j > 0(j = 1,2,\cdots,n),\ e_t > 0(t = 1,2,\cdots,m).$$

利用 Lagrange 乘子法获得最大值点为

$$\varepsilon_j^* = \frac{r}{(n+m)t_r[D_j]}(j = 1,2,\cdots,n),\ e_t^* = \frac{r}{(n+m)t_r[G_t]}\ (t = 1,2,\cdots,m).$$

由此可得到矩阵对 $(\Delta W, \Delta V)$ 的最大扰动集为

$$\Omega_t^* = \left\{(\Delta W, \Delta V):\ 0 \leqslant \Delta W \leqslant \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^* W_j;\ 0 \leqslant \Delta V \leqslant \sum_{t=1}^{m} e_t^* V_t\right\}.$$

定理 2.2. 在假设(1),(2)和(10),(11)式下，系统(1),(2)若采用滤波增益(4)式和状态估计器(3)式，则存在不确定噪声协方差矩阵对 $(\Delta W, \Delta V)$ 的最大自由扰动集 Ω_t^*，当 $(\Delta W,\Delta V) \in \Omega_t^*$ 时，能确保(7)式恒成立。

3 极小极大鲁棒估计

直接引用文[1]的结果可获得下述定理。

定理 3.1. 在定理 2.1(或定理 2.2)条件下，系统(1),(2)的状态估计误差性能指标偏离度的鞍点不等式成立，即

$$\Delta J(K^*,\Delta W,\Delta V) \leqslant \Delta J(K^*,\Delta W^*,\Delta V^*) \leqslant \Delta J(K,\Delta W^*,\Delta V^*).$$

其中 $\Delta W^* = a^* I_n \left(或 \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^* W_j\right)$；$\Delta V^* = b^* I_m \left(或 \sum_{t=1}^{m} e_t^* V_t\right)$；$K^*$ 是对应于最大扰动矩阵对 $(\Delta W^*,\Delta V^*)$ 的标准 Kalman 滤波增益。此时，由文[4]可知，最坏情况下的最优估计也就是极小极大鲁棒估计，即

$$\min_K \max_{(\Delta W,\Delta V)\in\Omega^*} \Delta J(K,\Delta W,\Delta V) = \max_{(\Delta W,\Delta V)\in\Omega^*} \min_K \Delta J(K,\Delta W,\Delta V).$$

4 算例

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} x_k + w_k^0,\ y_k = [1 \quad 0]x_k + v_k^0,\quad W = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},\ V = 1,\ r = 0.2.$$

计算结果为 $P=\begin{bmatrix}0.3678 & 0\\ 0 & 0.5555\end{bmatrix}$，$K=\begin{bmatrix}0.2420\\ 0\end{bmatrix}$. 在定理 2.1 条件下，解得非结构扰动界为

$$a^*=0.0220,\ b^*=0.9699,\ P^*=\begin{bmatrix}0.4897 & 0\\ 0 & 0.6167\end{bmatrix},\ K^*=\begin{bmatrix}0.2958\\ 0\end{bmatrix},$$

$\Delta J(K^*,\Delta W^*,\Delta V^*)=0.18312<0.2$. 在定理 2.2 条件下，解得

$$\varepsilon_1=0.0378,\ \varepsilon_2=0.0240,\ e_1=0.6459,\ P^*=\begin{bmatrix}0.4969 & 0\\ 0 & 0.6222\end{bmatrix},\ K^*=\begin{bmatrix}0.2988\\ 0\end{bmatrix},$$

$\Delta J(K^*,\Delta W^*,\Delta V^*)=0.1957<0.2$.

5 结论

文中给出了确保估计误差性能指标的有关不确定噪声协方差矩阵的结构扰动和非结构扰动的上界，并在此界限内采用极小极大鲁棒估计器对状态进行估计。它不仅能相对地极小化不确定下的最坏性能，而且也能将估计误差性能指标对理想值的偏离度控制在任意设定的允许范围内。

参 考 文 献

[1] Luo J S, Johnson A. Stability robustness of the discrete-time LQG system under plant perturbation and noise uncertainty. *Int. J. Control*, 1992, **55**(6): 1491—1502.

[2] 陈文华，顾兴源，袁 信. 具有不确定动态线性系统的鲁棒状态估计. 控制理论与应用，1992, **9**(5): 523—528.

[3] Suwanchai Sangsuk-iam, Thomas E Bullock. Analysis of discrete-time kalman filtering under incorrect noise covariances. *Automatica*, 1990, **35**(12): 1304—1309.

[4] Baser T, Oster G J. Dynamic noncooperative game theory. New York: Academic Press, 1982.

DISCRETE-TIME ROBUST KALMAN FILTER OF GUARANTEED STATE ESTIMATION PERFORMANCE

Xi Hongsheng

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027)

Abstract

This paper considers the design method of robust Kalman filter with uncertain noise for discrete-time linear system. The perturbating upper bound on uncertain covariances which can guarantee performance index of estimation errors is obtained. In particular, it is shown that, in the perturbating upper bound, using the optimum estimator under the worst-case can minimize the worst performance in uncertain-case and guarantee that performance index of state estimation errors reaches a given free degree.

Key words: Discrete-time system, uncertain noise, guaranteed estimation performance, perturbating upper bound.