第22卷 第6期 自 动 化 学 报 Vol. 22, No. 6
1996年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1996

短 文

线性时滞不确定系统的鲁棒稳定控制[1)]

倪茂林 谌 颖
(北京控制工程研究所 北京 100080)

摘 要

对于线性时滞不确定系统，给出一种鲁棒渐近稳定控制器的设计方法，且对匹配与不匹配两类不确定系统进行了研究．与现有结果相比，按此方法设计的系统不但控制器增益较小、实现方便，而且可以容许较大的系统不确定性．

关键词： 鲁棒控制，时滞系统，稳定性．

1 引言

对于许多工程实际问题，时滞是一个普遍存在的现象．为了方便控制器设计，人们对时滞系统建立了线性数学模型．但由于工况条件等因素的变化，系统模型中常含有不确定性，这往往使得按标称参数设计的系统不能得到满意的性能，甚至不能稳定工作．因此，对线性时滞不确定系统的鲁棒稳定控制问题，近年来得到了许多学者的重视[1-3]．文献[1]给出的方法比较保守，文献[2]未研究控制矩阵不确定问题，而文献[3]仅考虑了满足匹配条件的不确定系统．

本文基于 Riccati 方程和 Lyapunov 稳定性原理，给出一种使线性时滞不确定系统渐近稳定的鲁棒控制器的设计方法．对文中所研究的系统，允许系统矩阵和控制矩阵中同时含有不确定性，并对匹配与不匹配两类不确定系统都进行了研究．

2 问题描述

考虑线性时滞不确定系统

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(r(t))]x(t) + [A_d + \Delta A_d(s(t))]x(t-\tau) + [B + \Delta B(q(t))]u(t), \tag{1a}$$

$$x(t) = \sigma(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \tag{1b}$$

1）国家自然科学基金资助课题．
本文于1994年7月5日收到

式中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 是状态变量；$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 是控制变量；$A, A_d\in R^{n\times n}$ 与 $B\in R^{n\times m}$ 是系统标称参数矩阵，且 (A, B) 可控；$\tau>0$ 是系统的滞后常数；$\boldsymbol{\sigma}(t)\in R^n$ 是给定的连续初值向量. 假定系统可变参数向量 $\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{s}(t)$ 和 $\boldsymbol{q}(t)$ 是勒贝格可测的，且有 $\boldsymbol{r}(t)\in\phi\subset R^k$, $\boldsymbol{s}(t)\in\psi\subset R^l$, $\boldsymbol{q}(t)\in\pi\subset R^p$, 这里 ϕ, ψ 和 π 均为紧集. 进而假定 $\Delta A(.)$, $\Delta A_d(.)$ 和 $\Delta B(.)$ 均为连续矩阵函数.

定义 2.1. 若存在矩阵 $F(.)$, $G(.)$,H 和 $E(.)$ 满足条件

$$\Delta A(\boldsymbol{r}(t))=BF(\boldsymbol{r}(t)),\ \forall\boldsymbol{r}(t)\in\phi, \tag{2a}$$

$$\Delta A_d(\boldsymbol{s}(t))=BG(\boldsymbol{s}(t)),\ A_d=BH,\ \forall\boldsymbol{s}(t)\in\psi, \tag{2b}$$

$$\Delta B(\boldsymbol{q}(t))=BE(\boldsymbol{q}(t)),\ 2I+E(\boldsymbol{q}(t))+E'(\boldsymbol{q}(t))>0,\ \forall\boldsymbol{q}(t)\in\pi, \tag{2c}$$

则称不确定系统 (1) 是匹配的,否则是不匹配的.

对于不确定系统 (1), 若存在线性定常反馈控制

$$\boldsymbol{u}(t)=-K\boldsymbol{x}(t), \tag{3}$$

使系统对于所有可变参数 $\boldsymbol{r}(t)\in\phi$, $\boldsymbol{s}(t)\in\psi$, $\boldsymbol{q}(t)\in\pi$ 均保持渐近稳定性,则称这样的控制器为鲁棒稳定控制器. 下面分两种情况来研究控制器的设计问题.

3 匹配不确定系统

定理 3.1. 假定不确定系统 (1) 满足匹配条件 (2), 且由 (2) 式知存在一个标量 $\delta>0$ 满足

$$2I+E(\boldsymbol{q}(t))+E'(\boldsymbol{q}(t))\geqslant\delta I,\ \forall\boldsymbol{q}(t)\in\pi. \tag{4}$$

若选择 (3) 式中反馈矩阵 K 为

$$K=LB'P,\ L=\gamma I, \tag{5}$$

则由 (3) 式确定的控制器为鲁棒稳定控制器,式中 P 为 Riccati 方程

$$A'P+PA-PBMB'P+Q=0 \tag{6}$$

的正定解,其中加权阵如下选择:

$$0<M\leqslant(\gamma\delta-\eta)I-HH'/\xi-G(\boldsymbol{s})G'(\boldsymbol{s})/\theta, \tag{7a}$$

$$Q>F'(\boldsymbol{r})F(\boldsymbol{r})/\eta+(\xi+\theta)I,\ \forall r\in\phi,\ \boldsymbol{s}\in\psi, \tag{7b}$$

式中 η,ξ 和 θ 为设计者选定的任意正数,参数 $\gamma>0$ 应选择足够大,使得 M 为正定阵.

注 1. 在 (7) 式中,若 $F(\boldsymbol{r})=0$, 可选 $\eta=0$; 若 $G(\boldsymbol{s})=0$, 可选 $\theta=0$.

对于 $\Delta B(\boldsymbol{q}(t))=0$ 情形,可使用下面定理.

定理 3.2. 假定不确定系统 (1) 满足匹配条件 (2), 且 $\Delta B(\boldsymbol{q}(t))=0$, 若选择 (3) 式中反馈矩阵 K 为

$$K=LB'P,\ L=(\gamma I+HH'/\xi)/2, \tag{8}$$

则由 (3) 式确定的控制器为鲁棒稳定控制器,式中 P 为 Riccati 方程 (6) 的正定解,其中加权阵如下选择:

$$0<M\leqslant(\gamma-\eta)I-G(\boldsymbol{s})G'(\boldsymbol{s})/\theta, \tag{9a}$$

$$Q>F'(\boldsymbol{r})F(\boldsymbol{r})/\eta+(\xi+\theta)I,\ \forall\boldsymbol{r}\in\phi,\ \boldsymbol{s}\in\psi. \tag{9b}$$

式中 η,ξ 和 θ 为设计者选定的任意正数,参数 $\gamma>0$ 应选择足够大, 使得 M 为正定阵.

4　不匹配不确定系统

若系统（1）不满足匹配条件，但满足一个范围较广的“秩1”条件[1]，即

$$\Delta A(\boldsymbol{r}(t)) = \sum_{i=1}^{k} A_i r_i(t), \quad |r_i| \leqslant \bar{r}, \quad \forall i, \tag{10a}$$

$$\Delta A_d(\boldsymbol{s}(t)) = \sum_{i=1}^{l} A_{d_i} s_i(t), \quad |s_i| \leqslant \bar{s}, \quad \forall i, \tag{10b}$$

$$\Delta B(\boldsymbol{q}(t)) = \sum_{i=1}^{p} B_i q_i(t), \quad |q_i| \leqslant \bar{q}, \quad \forall i. \tag{10c}$$

式中

$$A_i = \boldsymbol{d}_i \boldsymbol{e}_i', \quad A_{d_i} = \boldsymbol{f}_i \boldsymbol{g}_i', \quad B_i = \boldsymbol{h}_i \boldsymbol{w}_i', \tag{11}$$

这里 $\boldsymbol{d}_i, \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{g}_i$ 和 $\boldsymbol{h}_i$ 为 n 维向量，$\boldsymbol{w}_i$ 为 m 维向量。

记

$$T = \bar{r} \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{d}_i \boldsymbol{d}_i', \quad U = \bar{r} \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i', \quad V = \bar{s} \sum_{i=1}^{l} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_i', \tag{12a}$$

$$W = \bar{s} \sum_{i=1}^{l} \boldsymbol{f}_i \boldsymbol{f}_i', \quad X = \bar{q} \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{h}_i \boldsymbol{h}_i', \quad Y = \bar{q} \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{w}_i \boldsymbol{w}_i', \tag{12b}$$

$$Z = \bar{s}^2 \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} |\boldsymbol{g}_j' \boldsymbol{g}_i| \boldsymbol{f}_i \boldsymbol{f}', \tag{12c}$$

则有如下定理。

定理 4.1. 假定系统（1）满足“秩 1”条件（10）—（12）。若对于一组正数 $\gamma, \theta, \omega, \xi, \eta$ 和正定矩阵 $L \in R^{m \times m}$，Riccati 方程

$$A'P + PA - PMP + Q = 0 \tag{13}$$

存在一正定解 P，其中

$$\begin{aligned} -M = \gamma(\theta X + BLYLB'/\theta - 2BLB') + [A_d(I + \omega V)A_d' \\ + W/\omega + Z]/\xi + \eta T, \end{aligned} \tag{14a}$$

$$Q > U/\eta + \xi I, \tag{14b}$$

且选择（3）式中反馈矩阵 K 为

$$K = \gamma L B' P, \tag{15}$$

则由（3）式确定的控制器为鲁棒稳定控制器。

例. 考虑不确定系统（1），其中

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 19 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \Delta A(\boldsymbol{r}(t)) = \begin{bmatrix} r_1(t) & 0 \\ 0 & r_2(t) \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_d(s(t)) = \begin{bmatrix} s(t) & s(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta B(q(t)) = \begin{bmatrix} q(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

且 $|r_1(t)| \leqslant 3$, $|r_2(t)| \leqslant 3$, $|s(t)| \leqslant 1$.

当 $|q(t)| \leqslant 0.1$ 时，根据定理 4.1 可选取参数 $\theta = 2$, $\omega = 2$, $\xi = 1.5$, $\eta = 1.5$, $\gamma = 3.5$ 及

(14)式中矩阵 $Q=\mathrm{diag}(3.51,3.51)$，得鲁棒稳定控制器为

$$u(t)=-Kx(t),\ K=[3.0660\ \ 2.4457]. \tag{16}$$

用文献[1]方法设计的鲁棒稳定控制器为

$$u(t)=-Kx(t),\ K=[3.47\ \ 2.94]. \tag{17}$$

当 $|q(t)|\leqslant 0.2$ 时，根据定理4.1可选取参数 $\theta=1.5,\ \omega=1.8,\ \xi=1.4,\ \eta=1.5,\ \gamma=4.1$ 及(14)式中矩阵 $Q=\mathrm{diag}\ (3.41,\ 3.41)$，得鲁棒稳定控制器为

$$u(t)=-Kx(t),\ K=[3.2570\ \ 2.6498] \tag{18}$$

设计实例表明，按本文方法设计的鲁棒控制器增益幅值较小，而且可以容许系统有较大的不确定性，因此适用范围广，且易于工程实现。

参 考 文 献

[1] Shen J C, Chen B S, Kung F C. Memoryless stabilization of uncertain dynamic delay systems: Riccati equation approach, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1991, **36**(5): 638—640.

[2] 俞 立. 不确定线性时滞系统的稳定化控制器设计. 控制理论与应用，1991，8(1): 68—73.

[3] 杨保民，孙明，孙翔. 滞后不确定系统的鲁棒稳定调节器设计. 自动化学报，1994，**20**(2): 202—207.

ROBUST STABILIZING CONTROL FOR LINEAR UNCERTAIN TIME-DELAY SYSTEMS

NI MAOLIN CHEN YING

(*Beijing Institute of Control Engineering, Beijing* 100080)

ABSTRACT

In this paper, we present a design procedure for robust stabilizing controllers of linear uncertain time-delay systems. Both matched and mismatched uncertain systems are considered. Compared to existing results, this procedure can be used to reduce the feedback gain of controllers and result in easier implementation. In addition, this procedure allows larger system uncertainties.

Key words: Robust control, time-delay system, stability.