第 22 卷 第 6 期 1996 年 11 月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 22, No. 6 Nov., 1996

短 文

复结构奇异值的几何解释及其计算：两块情形[1)]

谭 文 涂其栵 周其节
(华南理工大学自动化系 广州 510641)

梁 天 培
(香港理工大学机械与轮机工程系 香港)

摘 要

应用几何方法给出两块情形复结构奇异值的几何解释,并提出一种简单迭代计算方法.该方法求的是结构奇异值的真值而非其某一上界或下界.

关键词: 结构奇异值,几何方法,极大负子空间,广义特征值.

1 引言

近年来,μ 方法得到迅速发展[1]. 然而目前结构奇异值的特征还未得到完全刻画，这反应在结构奇异值计算中目前还只能求其上界或下界. 这里采用 Ball-Helton 几何方法[2],将对两块情形复结构奇异值进行处理,得到其几何解释. 然后将结构奇异值计算问题转化为求广义特征值问题,进而提出迭代计算法,所得结果收敛到结构奇异值的真值而非其某一上界或下界.

2 数学预备知识

令 K_1, K_2 为向量空间. 对每个线性算子 $P: K_2 \to K_1$,可定义其图为

$$S(P)=\left\{\begin{pmatrix} Px \\ x \end{pmatrix} : x \in K_2\right\} \subset K_1 \oplus K_2.$$

反之,对每个子空间 $M \subset K_1 \oplus K_2$,若其不含形如 $[z^T, 0]^T$ 的向量，则可定义其伴随角算子 $P: K_2 \to K_1$ 满足

1) 京港学术交流中心资助课题.

本文于 1994 年 6 月 29 日收到

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} Px \\ x \end{pmatrix} : x \in K_2 \right\} \subset K_1 \oplus K_2.$$

令 $\mathscr{F}_U(\cdot,\cdot)$表示链式散射变换 (chain scattering transform, CST), 其定义为

$$\mathscr{F}_U(G,Q) := (G_{11}Q + G_{12})(G_{12}Q + G_{22})^{-1}. \tag{1}$$

其中 $Q: K_2 \to K_1$ 及 $G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} : K_1 \oplus K_2 \to \bar{K}_1 \oplus \bar{K}_2$ 为线性算子.

引理 2.1[2]. 若 $R = \mathscr{F}_U(G,Q)$, 则 $S(R) = GS(Q)$. 反之亦然.

这里用到的一个重要概念是 Krein 空间. 可将其视为具有不定内积 $[x,y] = \langle Jx, y\rangle$ 的 Hilbert 空间, 其中 $\langle , \rangle$ 为 Hilbert 空间中通常内积. 若对所有 $x \in M$, 有 $[x, x] \leqslant 0 (=0, \geqslant 0)$, 则称 Krein 空间之子空间$M$为负的(零的或正的). 若一个负子空间不含于其它负子空间中,称其为极大负. 每个 Krein 空间都可分解为 $K = K_+ \oplus K_-$, 其中 K_+ 为正而 K_- 为极大负. 极大负子空间具有如下性质:

引理 2.2[2]. 每个极大负子空间$M \subset K$都对应一角算子 $P: K_- \to K_+$ 且 $\|P\| \leqslant 1$. 反之亦然.

3　结构奇异值的几何解释

对矩阵 $P \in C^{n\times n}$,定义结构摄动块 $\Delta \subset C^{n\times n}$ 为

$$\Delta := \{\mathrm{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \cdots, \delta_S I_{r_S}, \Delta_{S+1}, \cdots, \Delta_{S+F}] : \delta_i \in C, \Delta_{S+j} \in C^{m_j \times m_j}, \\ 1 \leqslant i \leqslant S, 1 \leqslant j \leqslant F\}, \tag{2}$$

从而 P 相对于 Δ 的结构奇异值定义为

$$\mu_\Delta(P) := \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \Delta, \det(I - P\Delta) = 0\}}. \tag{3}$$

当 Δ 为单个满块阵时,易知 $\mu_\Delta(P) = \|P\|$,其中$\|\cdot\|$表示“·”之奇异值范数.

将 Δ 划分为 $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & \\ & \Delta_2 \end{bmatrix}$, 相应地 P 划分为 $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$, 则有以下引理.

引理 3.1 (Main-Loop 定理[1]). $\mu_\Delta(P) < 1 \Leftrightarrow \mu_{\Delta_2}(P_{22}) < 1$ 且 $\max\limits_{\bar{\sigma}(\Delta_2) \leqslant 1} \mu_{\Delta_1}(\mathscr{F}_L(P, \Delta_2)) < 1$, 其中

$$\mathscr{F}_L(P, \Delta_2) := P_{11} + P_{12}\Delta_2(I - P_{22}\Delta_2)^{-1}P_{21}. \tag{4}$$

特别是,当 Δ_1, Δ_2 为两个满块阵时, $\mu_\Delta(P) < 1 \Leftrightarrow \|P_{22}\| < 1$ 且 $\max\limits_{\|\Delta_2\| \leqslant 1} \|\mathscr{F}_L(P, \Delta_2)\| < 1$.

注意到(4)式中的线性分式形式可化为链式散射形式,即

引理 3.2. 若 P_{21} 行满秩, 其奇异值分解为 $P_{21} = U[\Sigma \quad 0]V^*$. 令 $P_{11}V$ 相应分解为 $[A_1 \quad A_2]$,则 $\|\mathscr{F}_L(P, \Delta_2)\| < 1 \Leftrightarrow \|\mathscr{F}_U(G, \Delta_2)\| < 1$,其中

$$G = \begin{bmatrix} R(P_{12} - A_1(U\Sigma)^{-1}P_{22}) & RA_1(U\Sigma)^{-1} \\ -(U\Sigma)^{-1}P_{22} & (U\Sigma)^{-1} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

而 $R := (I - A_2 A_2^*)^{-\frac{1}{2}}$.

设 $G \in C^{(r_1+r_2)\times(c_1+c_2)}$, 令 $J_1 = \begin{bmatrix} I_{c_1} & \\ & -I_{c_2} \end{bmatrix}$, $J_2 = \begin{bmatrix} I_{r_1} & \\ & -I_{r_2} \end{bmatrix}$, 从而 $C^{r_1+r_2}, C^{c_1+c_2}$ 分

别对不定内积 $[,]_{J_2},[,]_{J_1}$ 为 Krein 空间. 由引理 2.1 和 2.2 可得如下引理.

引理 3.3. 若 P_{21} 行满秩,则 $\mu_\Delta(P)<1\Longleftrightarrow$ 对 $C^{c_1+c_2}$ 中任意极大负子空间 M,GM 在 $C^{r_1+r_2}$ 中亦为极大负,其中 G 由(5)式给定.

考虑如下优化问题

$$m(G)=\inf_M\inf_{x\in M}\frac{[Gx,\ Gx]_{J_2}}{[x,\ x]_{J_1}},\tag{6}$$

其中第一个 inf 对 $C^{c_1+c_2}$ 中所有极大负不变子空间而取. 从而

$$m(G)\geqslant 0\Longleftrightarrow\frac{[Gx,\ Gx]_{J_2}}{[x,x]_{J_1}}\geqslant 0,\forall x\in M,\forall M\Longleftrightarrow[Gx,Gx]_{J_2}\leqslant 0,\forall x\in M,\forall M.\tag{7}$$

再考虑如下优化问题

$$n(G):=\inf_{x\in C^{r_1+r_2},[x,x]_{J_1}\leqslant 0}\frac{[Gx,\ Gx]_{J_2}}{[x,x]_{J_1}}=-\sup_{x\in C^{r_1+r_2},[x,x]_{J_1}=-1}[Gx,Gx]_{J_2},\tag{8}$$

易知 $n(G)$ 存在时,(8)式之极小点在 (J_2,G^*J_1G)的特征向量处达到. 设 (J_2,G^*J_1G)特征值为 $\{\lambda_i\}$,相应特征向量为 $\{\boldsymbol{v}_i\}$. 取 $\hat{M}=\mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_i:i$ 之个数等于 r_2 且满足$[\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i]_{J_2}\leqslant 0\}$, 从而 $\hat{M}$ 为极大负子空间且 $\inf\limits_{x\in M}\dfrac{[Gx,\ Gx]_{J_2}}{[x,x]_{J_1}}=n(G)$. 而对任一极大负子空间，显然有 $\inf\limits_{x\in M}\dfrac{[Gx,\ Gx]_{J_2}}{[x,x]_{J_1}}\geqslant n(G)$,于是 $m(G)=n(G)$. 令

$$\Gamma_1^-:=\{x\in C^{c_1+c_2}:[x,x]_{J_1}\leqslant 0\},\ \Gamma_2^-:=\{x\in C^{r_1+r_2}:[x,x]_{J_2}\leqslant 0\},\tag{9}$$

显然, Γ_1^-,Γ_2^- 分别为 $C^{c_1+c_2},C^{r_1+r_2}$ 中全体负元素的集合. 易知它们分别为 $C^{c_1+c_2},C^{r_1+r_2}$ 中的锥(这里称之为负锥). 由引理 3.3 可得到两块情形复结构奇异值的如下几何解释.

定理 1. 当 P_{21} 行满秩时,设 G 由(5)式给出,则以下叙述是等价的:

1) $\mu_\Delta(P)<1$;

2) 对 $C^{c_1+c_2}$ 中任意极大负子空间 M,GM 在 $C^{r_1+r_2}$ 中亦为极大负;

3) 对 $C^{c_1+c_2}$ 中任意负元素 x,Gx 在 $C^{r_1+r_2}$ 中亦为负;

4) $G\Gamma_1^-\subset\Gamma_2^-$.

当 P_{12} 列满秩时,可得到对偶结果.

定理 1 表明,若将 G 视为 P 之变换,则 $\mu_\Delta(P)<1$ 的几何意义是, G 将输入空间的负锥映射到输出空间的负锥.

4　结构奇异值的计算

考虑优化问题 (8), 设 $(J_2,\ G^*J_1G)$ 特征值为 $\{\lambda_i\}$, 相应特征向量为 $\{\boldsymbol{v}_i\}$. 又设 $k_-:=\{i:[\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i]_{J_2}<0\}$. 由上节推导,当问题(8)极小值存在时,驻点 $\hat{x}$ 取为(J_2,G^*J_1G)的特征向量, 从而 $n(G)=\min\limits_{i\in k_-}\lambda_i:=\lambda_{\min}^-$. 注意到 $\lambda_{\min}^-$ 为全局最小点的充要条件为 $\lambda_{\min}^-J_2-G^*J_1G$ 非负定,从而由定理 1 可得如下定理.

定理 2. 若 P_{21} 行满秩, 则 $\mu_\Delta(P)<1\Longleftrightarrow\lambda_{\min}^-J_2-G^*J_1G\geqslant 0$ 且 $\lambda_{\min}^-\geqslant 0$. 当 P_{12} 列满秩时,可得到对偶结果.

因 $\mu_\Delta(P)<\gamma \Leftrightarrow \mu_\Delta(\gamma^{-1}P)<1$，从而可以通过迭代方法求得两块复结构奇异值：选择初始值 γ,根据定理 2 判断 $\mu_\Delta(P)$ 是否小于 γ。若是,减小 γ; 否则增大 γ。此过程收敛到结构奇异值的真值而非其某一上界或下界。

例。 设 $P=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 7 & 1\end{bmatrix}$, Δ_1,Δ_2 为 2×2, 1×1 满块阵,应用本文的算法得 $\mu=7.1204$。而 Perron 奇异值方法[3]得 $\mu=7.2583$;幂算法[4]得 $\mu=7.1204$。当 Δ_1,Δ_2 分别为 1×1, 2×2 满块阵时,本文方法得 $\mu=5.5580$; Perron 奇异值方法得 $\mu=5.5611$;幂算法得 $\mu=5.5580$。可见本文方法与幂算法精度一致。

5 结束语

本文应用几何方法给出两块情形复结构奇异值的几何解释，然后将其计算化为广义特征值问题,进而得到一种简单迭代算法。

参 考 文 献

[1] Packard A, Doyle J. The complex structured singular value. *Automatica*, 1993(29): 71—109.

[2] Helton JW. Operator theory, analytic functions and electrical engineering.CBS 68,Amer. Math. Soc., Providence, 1987.

[3] Safonov MG. Stability margins for diagonally perturbed multivariable feedback system. *IEE Proc., Part D*, 1982 (129): 251—256.

[4] Balas G, Doyle J, Glover K, Smith R. The μ analysis and synthesis toolbox. Math. Works and MUSYN, 1991.

THE GEOMETRIC INTERPRETATION AND THE COMPUTATION OF COMPLEX STRUCTURED SINGULAR VALUE: TWO-BLOCK CASE

TAN WEN TU QILIE ZHOU QIJIE

(*Department of Automation, South China University of Technology, Guangzhou* 510641)

LEUNG T P

(*Department of Mechanical and Marine Engineering, Hongkong Polytechnic, Hongkong*)

ABSTRACT

In this paper, we give a geometric explanation of complex structured singular value for two block case using the geometric approach, and then proposes a method to compute it. Our approach is to computes the true value of structured singular value instead of its upper bound or lower bound.

Key words: Structured singular value, geometric approach, maximal negative subspace, generalized eigenvalue.