

由影调恢复物体外形的唯一性¹⁾

邓雁萍 李介谷 林慎机

(上海交通大学图像处理与模式识别研究所 上海 200030)

摘要 研究了当投射的平行光垂直于图像平面时图像以及成像物体区域内部的几何特性与边界特性,讨论了由一般物体所成的像唯一地求解 SFS 问题的条件,并由此提出了一个更为一般的整体区域上的唯一性定理和局部不唯一定理,推广了本领域现有的研究成果. 定理的证明以微分几何和常微分方程几何理论为工具,其过程是构造性的,亦即在定理证明的同时指明了由单目图像恢复物体外形且不使用正则化技术的可能途径.

关键词 由影调恢复外形,计算机视觉,单目图像.

1 引言

由单目图象的影调恢复三维物体的外形(SFS)是指由图像上的灰度变化恢复物体的外形. 由于灰度约束方程本身的病态特性,一幅图像可能对应着多个不同的物体表面,所以 SFS 一般是作为病态问题加以处理的^[1],通常采用的方法是引入正则化技术以得到一个合理的物体表面作为 SFS 问题的解. 现有的研究表明,对满足一定条件的图像而言, SFS 有唯一解,此时,引用正则化技术有可能导致一个畸变的甚至是多重的解,因此有必要研究 SFS 问题有唯一解的条件. 此研究不仅具有理论意义,而且对图像理解的实际应用具有指导意义,为 SFS 问题的解决提供新的思路. 在唯一性理论的指导下,作者已构造出了一些直接算法^[2,3]. 本文讨论当平行光沿视线方向入射时 SFS 的唯一性问题. 取空间坐标系 xyz 的 z 轴与视线方向平行,若物体具有光滑的朗伯表面和均匀的反射特性,则在正交投影下图像的灰度约束方程为

$$I(x, y) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}. \quad (1)$$

显然,在当前模型的图像平面上的灰度最大值($I=1$)点就是奇点. 在 $I(x, y)$ 满足(1)式时, Brooks^[4]、Bruss^[5]等分别提出了一些唯一性定理,更为一般的结果是由 Oliensis^[6]得到的,他提出的定理要求物体的可见面是零亏格的,在证明中采用了旋转指标的概念和欧拉公式,其证明是在假设曲面在奇点处的性质已知,即奇点只能是源、汇或鞍的前提下进行的,而且也未能指出如何取定解常微分方程的初始条件,故所给出的证明是存在性的证明. 本文给出了一个更一般的唯一性定理,其必要条件较之于 Oliensis 的唯一性定理广泛,成像物体不必是零亏格的,由于证明的理论基础是微分几何和常微分方程几何理论,

1) 国家自然科学基金资助项目.

因而证明简洁明了,证明的过程是构造性的,即不仅证明了 SFS 解的唯一性问题,而且指明了恢复的途径.

2 灰度方程的特征微分方程组与唯一性定理

假设物体完全包含在视线范围之内,令物体可见表面 Ω 的方程为 $z=f(x,y)$,则 Ω 上点 (x,y,z) 处的外法向量为: $\vec{n} = \frac{(-p, -q, 1)^T}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$, 其中 $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. 如图1, 设 Γ_0' 为 Ω 的遮挡边界曲线, Γ_0 为图像平面上与 Γ_0' 相对应的边界, 又令 A' 为 Γ_0' 上的一点, \vec{n}_0' 为曲面在该点的法线, A 为 Γ_0 上 A' 的对应点, \vec{n}_0 为 Γ_0 在 A 点的法线. 显然 \vec{n}_0' 与 \vec{n}_0 平行, 以下在讨论中将不区分这两者.

在图像坐标系内非边界上的点 (x,y) 处, 令 $H(x,y,p,q) = -\frac{1}{2}(p^2+q^2) + \frac{1}{2}(\frac{1}{I^2}-1)$, 则 $H(x,y,p,q) = -\frac{1}{2}(p^2+q^2) - \tilde{v}(x,y) \equiv 0$, 其中 $\tilde{v}(x,y) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{I^2})$, 显然 $H_p = -p$, $H_q = -q$, $H_x = -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}$, $H_y = -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}$, $H_z = 0$. 取 r 为时间变量, ∇ 为二维哈密顿算子, 记 $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dr}$, 可得灰度方程的特征微分方程组

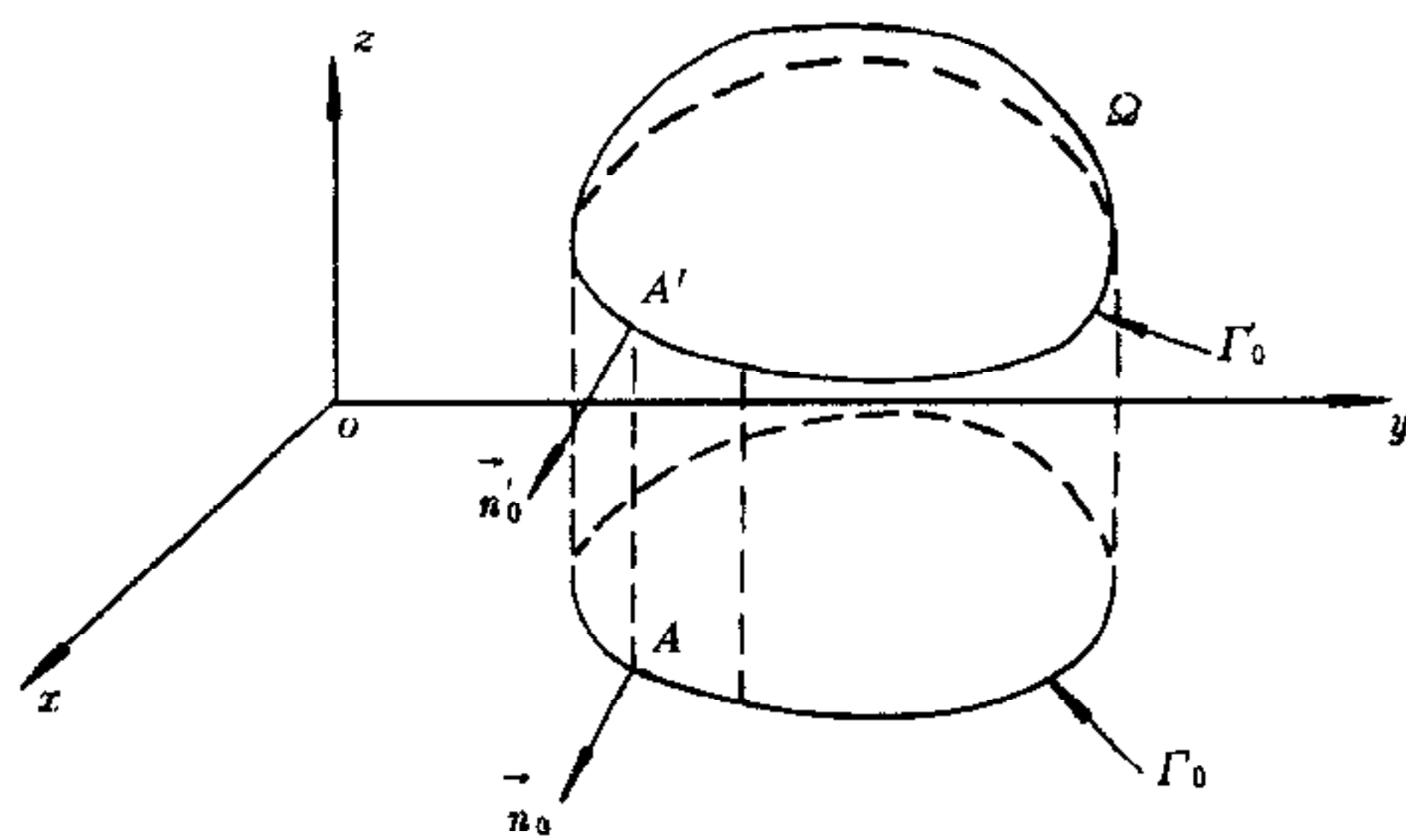


图1 Ω 的边界及其在图像上的投影

$$\begin{cases} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dr} = -(p, q)^T = -\nabla z, \\ \frac{d}{dr}(p, q)^T = -\frac{d\vec{v}}{dr} = \nabla \tilde{v}, \\ \frac{dz}{dr} = 2\tilde{v}. \end{cases} \quad (2)$$

其初始条件为 $\lim_{r \rightarrow 0} \vec{r} = \vec{r}_0 |_{\vec{r}_0 \in \Gamma_0}$ 和 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{n}_0$, 在图像平面上常微分方程组(2)的解即为轨线, 为了叙述方便, 将表面上的特征线也统称为轨线.

下面给出关于求解 SFS 问题的唯一性定理.

定理1. 假设(a)物体在视线范围以内, 图像边界 Γ_0 为光滑边界; (b) 灰度 $I(x,y)$ 在图像的开域(有界区域的图像由其开域加 Γ_0 组成)上有直到二阶的连续导数, 而且在奇点处 $\frac{\partial^2 I}{\partial x_i \partial y_j}$ 的矩阵行列式不为零; (c) 灰度约束方程具有(1)式的形式; (d) 灰度 $I(x,y)$ 的极大值点只有有限个, 则在上述假设条件下, SFS 问题有唯一解.

为证明定理1, 以下先讨论图像上轨线的性质与分布, 再研究曲面在奇点处的性质与深度表示.

3 图像平面上轨线的性质与分布

首先考察轨线在 Γ_0 上的性质. 记 $\vec{i} = \frac{\vec{v}}{v}$, 其中 $v = |\vec{v}| = \sqrt{p^2 + q^2}$, 显然 \vec{i} 为轨线上的单位切向量. 若 \vec{n} 为曲面 Ω 上点 (x, y, z) 处的法线, 则 $\vec{n} \cdot \vec{i} = \sqrt{1 - I^2}$. 在 Γ_0' 上, $I = 0$, 记 (x, y, z) 在图像平面上的对应点处法向量为 \vec{n}_0 , 由上一节的讨论可知: $\vec{n}_0 \cdot \vec{i} = 1$, 即 \vec{i} 与 \vec{n}_0 同向.

引理1. 图像平面上轨线垂直于边界 Γ_0 , 并指向图像区域的外部.

现在讨论图像平面上轨线在 $I = 1$ (奇点) 处的性质. 设 $I(x, y)$ 在 $I = 1$ 的点附近二阶导数存在且其矩阵行列式不为零, $I = 1$ 时的像素点坐标 (x, y) 为图像平面的原点. 令 $a = -\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$, $b = -\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y}$, $c = -\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$, 将 $I(x, y)$ 在原点附近展开可近似得到

$$I(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2). \quad (3)$$

在奇点附近有 $I < 1$, 根据(3)式可得 $a > 0, c > 0, b^2 < ac$. 又设 $e = \frac{\partial p}{\partial x}$, $f = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, $g = \frac{\partial q}{\partial y}$,

由于 $I = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$, 将 $\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$ 在奇点附近作二阶展开得到

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} = 1 - \frac{1}{2}[x^2(e^2 + f^2) + 2xy(ef + fg) + y^2(f^2 + g^2)]. \quad (4)$$

将方程组(2)中的第一式在原点附近展开得

$$\frac{d\vec{r}}{dr} = - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \approx - \begin{pmatrix} x \frac{\partial p}{\partial x} + y \frac{\partial p}{\partial y} \\ x \frac{\partial q}{\partial x} + y \frac{\partial q}{\partial y} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \vec{r}.$$

解系数矩阵的特征方程得特征值为 $\lambda = \frac{-(e+g) \pm \sqrt{(e-g)^2 + 4f^2}}{2}$, 它表明两个特征值均

为实数. 比较(3), (4)两式, 再由韦达公式有 $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \pm \sqrt{ac - b^2}$, 因为 $ac > b^2$, 所以 λ_1 和 λ_2 均不为零. 此结果表明, 在奇点的局部区域中奇点性质不定, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ 时, 奇点为鞍点, $\lambda_1 < 0$ 且 $\lambda_2 < 0$ 时, 奇点为汇, 否则奇点为源. 这一结论与灰度方程的病态特性是一致的, 它表明: 1) 灰度方程在局部区域中不具备唯一解, 唯有借助于边界条件才有可能求得灰度方程的解; 2) 至少有两条轨线可以到达奇点. 由此引出了下列局部不唯一定理.

定理2. 奇点的类型只能是源、汇或鞍, 在奇点的局部区域中灰度方程解不唯一.

最后, 根据轨线方程组(2)、斯托克斯公式、轨线的稠密性以及常微分方程解的唯一性可以得到如下几条关于分布性质的引理^[7].

引理2. 图像区域上轨线不会自行封闭.

引理3. 图像区域上的轨线必与某奇点相连.

引理4. 图像区域上的奇点之间必同上一条或多条轨线连接.

引理5. 图像区域上至少存在一个奇点, 该奇点至少有两条轨线与边界连接.

4 曲面在奇点处的性质与深度表示

过奇点作曲面的测地线,若 \vec{N} 与 \vec{T} 分别为测地线的主法线单位向量和单位切向量,则沿测地线有 $\vec{n} = \vec{N}$,在测地线上测地曲率为0,关于测地线的切向测地挠率亦为0. 假设 k 与 s 分别为测地线的曲率和弧长, \vec{k} 为沿 z 轴方向的单位向量,因为 $I = \vec{k} \cdot \vec{n}$,所以由 Frenet 公式可知 $\frac{d^2 I}{ds^2} = -\frac{dk}{ds} \vec{k} \cdot \vec{T} - k^2 I$. 在奇点处, $I = 1, \vec{k} \cdot \vec{T} = 0$, 于是 $\frac{d^2 I}{ds^2} = -k^2$. 由于沿测地线测地曲率为0,故曲面在奇点处沿测地线方向的法曲率 k_n 即为测地线在奇点处的曲率 k ,即 $k_n^2 = -\frac{d^2 I}{ds^2}$. 在式(1)的前提下,从奇点看,在一小范围内测地线与图像平面内极坐标系的径向线一致. 令 ds 为测地线上的弧长, dl 为其对应的图像平面上极坐标系内径向线的长度,在奇点处,当 $ds \rightarrow 0$ 时 $ds = dl$,故不难得到 $k_n^2 = -\frac{d^2 I}{dl^2} \Big|_0$. 在奇点附近沿测地线

方向将 I 展开至二阶: $I \approx 1 + \frac{d^2 I}{dl^2} \Big|_0 (dl)^2 < 1$, 所以 $\frac{d^2 I}{dl^2} \Big|_0 (dl)^2 < 0$ 且

$$k_n = \pm \sqrt{-\frac{d^2 I}{dl^2} \Big|_0}. \quad (5)$$

由于 k_n 为物体表面上测地线在奇点处的曲率,其正负性表明测地线在 $I = 1$ 处的凹凸性,所以沿测地线方向曲面的凹凸性不定.

设表面上的点 P 为极值点,当光线垂直于曲面在 P 点处的切平面时,由 $I = \vec{k} \cdot \vec{n} = 1$ 可知,点 P 在图像平面上的对应点是奇点. 曲面在点 P 的邻近处的形状近似为一个二次曲面

$$Z = \frac{k_1}{2}(X)^2 + \frac{k_2}{2}(Y)^2. \quad (6)$$

其中 k_1, k_2 为 P 处沿主方向的法曲率, $(X-Y)$ 为以单位主方向为基向量的笛卡尔直角坐标系, $Z = z$, 由(6)式可知,在 $(X-Y)$ 平面上轨线方程为

$$\frac{d\vec{r}}{dr} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \quad (7)$$

依据(6), (7)式,曲面在 P 附近的结构可定, k_1 的符号确定了奇点附近的轨线分布特征.

当已知两条在奇点附近切线不重合的轨线时,由于 $(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dr})$ 沿轨线可求,故已知的两条轨线在奇点处的法曲率可求. 根据曲面的连续性,由奇点附近轨线的分布以及公式(5)不难求得主曲率 k_1, k_2 .

引理6. 当已知两条在奇点附近切线不重合的轨线时,可以确定曲面在该点的类型及其奇点的类型.

以 s 表示轨线的弧长, z 表示深度函数,由方程组(2)得到 z 沿图像平面上轨线的积分表示

$$z = z_0 - \int_0^s \sqrt{-2\tilde{v}} ds. \quad (8)$$

在边界的附近, s 的正向指向边界之外,由(8)式可知,在边界附近当轨线沿正向走向图像

区域之外时, z 将变小, 对(8)式做进一步讨论得引理7.

引理7. 对表面上与边界有两条轨线相连的奇点而言, 这两条轨线在奇点处的法曲率确定.

5 灰度方程解的唯一性定理证明

本节给出定理1的证明.

证明. 若解不唯一, 则由引理5和引理7可知, 图像区域上至少存在一个奇点, 它至多只有一条轨线与边界相连或与确定的奇点相连, 即只有一条轨线是确定的. 由定理2, 奇点至少与四条轨线相连, 故依据引理4, 它的其余轨线必与那些未确定的奇点相连. 将奇点分为确定和不确定的两类, 则不确定奇点所发出的轨线全体只能是一个区域加上从区域中发出的至多有限条轨线, 由于区域有限, 因此它必有由轨线组成的边界, 该边界之外的轨线是确定的, 且确定的轨线至多只与一个不确定的奇点相连, 由定理2、轨线的不可相交性和稠密性, 这样的不确定的奇点只能是鞍点, 令这些鞍点与区域的边界构成的封闭区域为 A . 因为 A 中不能有闭轨线, 因此 A 中的轨线或发自源或止于汇, 当然也不排除鞍点的存在, 由引理5可知, A 内部的奇点必有轨线与 A 边界上的奇点连接, 这样的轨线只有有限条, 而且连接的范围内无其它轨线, 否则必形成闭轨线或相交的轨线, 但由于轨线的稠密性, 在连接范围内尚有无限条轨线, 因此必然会出现闭轨线或相交轨线, 与引理2和轨线的唯一性相悖, 所以这样的封闭区域不存在, 也就是, 只要找出与边界相连的所有源和汇, 就可以找到两条不同的与各奇点相连的轨线, 再由引理7和引理6, 每个奇点都是可确定的, 即解是唯一的, 故定理1成立.

6 结论

从微分几何理论和常微分方程几何理论出发, 通过对图象上和物体可见面上的轨线分布特性以及曲面在奇点处的三维几何信息进行分析提出并证明了一平行光垂直入射时 SFS 解在整体区域上的唯一性定理和局部不唯一定理, 此唯一性定理由于对形成图像的物体可见面的限制条件少, 因而适应面也更广泛. 本文的研究表明, 对 SFS 这一复杂问题不能一概地用正则化技术加以处理, 除去噪声的影响, 有相当数量的图像能满足本文定理所要求的条件, 因而其 SFS 问题的解唯一. 进一步应发展有效的 SFS 数值方法, 并对平行光沿任意可视方向入射的 SFS 问题研究其唯一性.

参 考 文 献

- [1] Horn B K P. Height and gradient from shading. *International Journal of Computer Vision*, 1990, 5(1):37-75.
- [2] Deng Yanping, Li Jiegu, Lin Shengji. The linearization and a supporting function for direct implementation of shape-from-shaping. In: *Proceedings Asian Conference on Computer Vision, Japan*, 1993, 9-12.
- [3] Deng Yanping, Li Jiegu, Lin Shengji. Direct shape reconstruction of 3D object from monocular shading image. In: *Proc TENCON'93 Beijing*, 1993, 952-955.
- [4] Brooks M J. Two results concerning ambiguity in shape from shading. In: *Proceedings, National Conference on Artificial Intelligence*. 1983, 36-39.

- [5] Bruss A R. The eikonal equation; some results applicable to computer vision. *Journal of Mathematical and Physics*. 1982, **23**(5): 890—896.
- [6] Oliensis J. Uniqueness in shape from shading. *International Journal of Computer Vision*, 1991, **6**(2):75—104.
- [7] 邓雁萍. 三维物体的外形恢复与 CAD 技术. 上海交通大学博士学位论文. 1994.

UNIQUENESS OF RECOVERING THE SURFACE BY SHADING PATTERNS

DENG YANPING LI JIEGU LIN SHENJI

(*Institute of Image Processing & Pattern Recognition, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030*)

Abstract Under the condition that the projecting light is perpendicular to the image plane, and from a study on the geometric and boundary properties of the imaged object, this paper discusses the uniqueness of the conditions for solving SFS problem from the image of a general object. Two theorems are established, the uniqueness of SFS for the global area and the non-uniqueness in some local regions, both of them extend the research results in this field. The proofs are based on differential geometry and geometric theory of ordinary differential equations and are constructive. The proof itself provides a possible way to uniquely recover the surface of a monocular-imaged object with the absence of regularization technique.

Key words Shape from shading, computer vision, monocular image.

邓雁萍 1984年本科毕业于华中理工大学,1987年硕士毕业于南京航空航天大学,1994年博士毕业于上海交通大学图象处理与模式识别研究所.现为上海交通大学图象处理与模式识别研究所讲师,主要研究方向:计算机视觉、智能图象理解.

李介谷 IEEE 高级会员,现为上海交通大学图象处理与模型识别研究所教授,博士研究生导师.主要研究方向:计算机视觉.