

一类非线性离散时间系统的 神经网络解耦策略

吴黎明 柴天佑

(东北大学自动化中心 沈阳 110006)

摘要 考虑用神经网络作为补偿器,对一类非线性系统进行输入输出解耦.给出了这类系统的可解耦的充要条件,并证明在该条件下系统可解耦成线性系统且极点可任意配置.基于此,给出了这类系统的一个神经网络解耦方法.

关键词 神经网络,补偿器,解耦,极点配置,非线性离散时间系统.

1 概述

离散时间非线性系统的解耦问题远不如连续时间系统研究得深入.文[1-3]将连续时间系统的部分结果推广到离散时间系统,但其它很多结果难以类似推广.离散时间系统的解耦就是要找到一组新控制量,使输出与新控制量的关系是一组无耦合的方程.本文考虑一类特殊非线性系统,先给出它可解耦的充要条件,并证明它可解耦成线性系统.极点可任意配置,且新控制量与旧控制量的关系可用一组连续函数表示.然后,提出了用神经网络逼近这组连续函数的策略和训练这种网络的方法,最后对一个例子进行了仿真研究.

2 问题描述

本文仅考虑如下形式的输入输出模型:

$$y_i(k+d_i) = f_i(\tilde{\mathbf{y}}(k), \tilde{\mathbf{u}}(k)) + \sum_{j=1}^n g_{ij}(\tilde{\mathbf{y}}(k), \tilde{\mathbf{u}}(k))u_j(k), \quad (1)$$
$$i = 1, 2, \dots, n.$$

对任意 i , 要求 $\sum_{j=1}^n g_{ij}^2$ 不恒为零. 输入输出通道个数均为 n . $y_i(k)$ 及 $u_i(k)$ 分别表示 k 时刻第 i 个输出和第 i 个输入. 并且

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}(k) &= (\tilde{y}_1(k), \tilde{y}_2(k), \dots, \tilde{y}_n(k)), \\ \tilde{y}_i(k) &= (y_i(k), y_i(k-1), \dots, y_i(k-p_i+1)), \\ \tilde{\mathbf{u}}(k) &= (\tilde{u}_1(k), \tilde{u}_2(k), \dots, \tilde{u}_n(k)), \\ \tilde{u}_i(k) &= (u_i(k-1), u_i(k-2), \dots, u_i(k-q_i)). \end{aligned}$$

p_i 和 q_i 均为正整数. 记 $p = \sum_{i=1}^n p_i, q = \sum_{i=1}^n q_i, s = p + q$, 则 $f_i: \mathcal{R}^s \rightarrow \mathcal{R}^1, g_{ij}: \mathcal{R}^s \rightarrow \mathcal{R}^1, \mathcal{R}$ 表示实欧氏空间. 本文讨论仅限实空间的有界闭集上. 设 $\tilde{y}(k) \in \mathcal{Y} \subset \mathcal{R}^p, \tilde{u}(k) \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^q, \mathcal{Y}, \mathcal{U}$ 均为有界闭集. 静态解耦问题可表述为

求 $s+n$ 维实空间上的实连续函数组 $\alpha_i(\cdot)$

$$u_i(k) = \alpha_i(\tilde{y}(k), \tilde{u}(k), \tilde{v}(k)), \tag{2}$$

这里 $\tilde{v}(k) = (v_1(k), v_2(k), \dots, v_n(k)) \in \mathcal{V} \subset \mathcal{R}^n$.

\mathcal{V} 为 \mathcal{R}^n 的有界闭子集, $v_i(k)$ 为新控制量, 和一组正整数 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, 使(1)式中的 $u_j(k)$ 用(2)式替换后可写成(3)式的形式.

$$y_i(k + \beta_i) = \varphi_i(\tilde{y}_i(k), v_i(k)). \tag{3}$$

这里要求雅可比矩阵 $[\frac{\partial \alpha_i}{\partial v_j}]$ 在 $\mathcal{Y} \times \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ 上处处不为零, 并且 $\varphi_i: \mathcal{R}^{p_i+1} \rightarrow \mathcal{R}^1$ 在 $\mathcal{Y} \times \mathcal{V}$ 上连续, 对 $v_i(k)$ 可微, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial v_i(k)}$ 在 $\mathcal{Y} \times \mathcal{V}$ 上处处不为零.

如图1所示, 将被控对象过去几个时刻的输入输出值返给 NN, 与新控制量 $v_i(k)$ 一起作为网络的输入, 让网络逼近(2)式中的关系. 这时 NN 和 Plant 作为一个整体可用(3)式描述, 即实现了输入输出解耦. 但在此之前要解决两个问题: (一) 方程组(1)是否可解耦, 即 $\alpha_i(\cdot)$ 的存在性; (二) φ_i 能否确定下来以便训练神经网络.

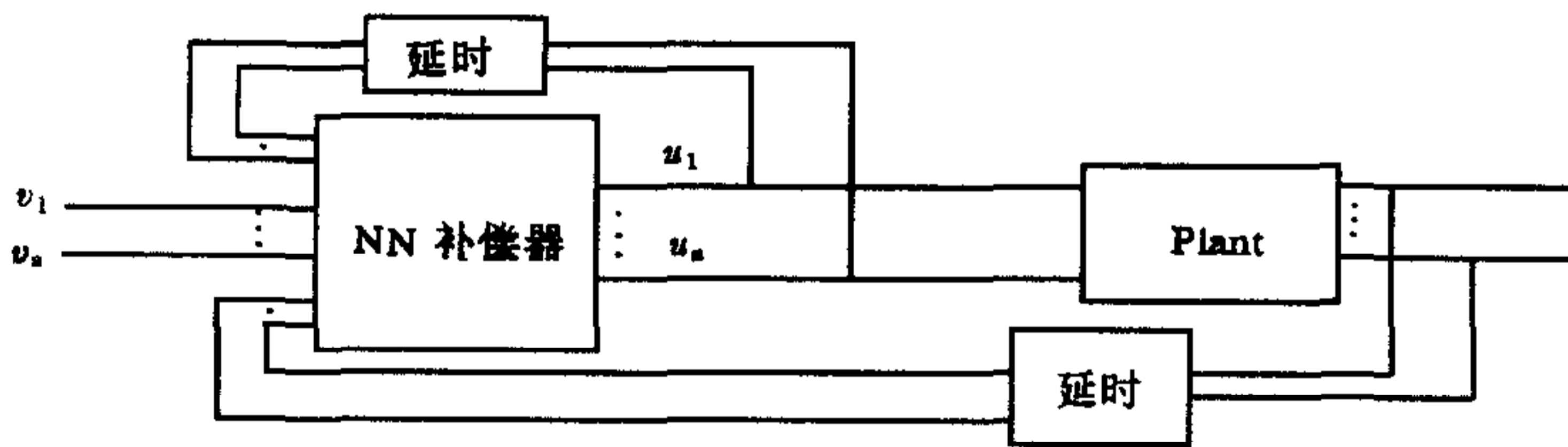


图1 神经解耦结构框图

3 可解耦条件及解耦结果

定理. 若系统(1)中的 $f_i(\cdot), g_{ij}(\cdot)$ 均在 $\mathcal{Y} \times \mathcal{U}$ 上可微, 则存在 $\mathcal{Y} \times \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ 中的可微函数 $\alpha_i(\cdot)$ 使(1)式可解耦成(3)式的形式的充要条件是 $n \times n$ 行列式 $|G(\tilde{y}(k), \tilde{u}(k))| = |g_{ij}(\tilde{y}(k), \tilde{u}(k))|$ 在有界闭集 $\mathcal{Y} \times \mathcal{U}$ 上处处不为零.

证明. a) 充分性. 若 $|g_{ij}(\tilde{y}(k), \tilde{u}(k))|$ 在有界闭集 $\mathcal{Y} \times \mathcal{U}$ 上处处不为零, 则可取一组 $\varphi_i(v_i(k))$ 与 $\tilde{y}_i(k)$ 无关, 在 \mathcal{V} 上 $\frac{d\varphi_i}{dv_i}$ 处处不为零.

$$\text{令 } f_i(\tilde{y}(k), \tilde{u}(k)) + \sum_{j=1}^n g_{ij}(\tilde{y}(k), \tilde{u}(k)) u_j(k) = \varphi_i(v_i(k)). \tag{4}$$

记

$$G(\cdot) = (g_{ij}(\cdot))_{n \times n}, \quad f(\cdot) = (f_i(\cdot))_{n \times 1}, \\ \Phi(v_i(k)) = (\varphi_i(v_i(k)))_{n \times 1}, \quad u(k) = (u_i(k))_{n \times 1},$$

则

$$\begin{aligned} G(\cdot)u(k) + f(\cdot) &= \Phi(v_i(k)) \\ u(k) &= G^{-1}(\cdot)(\Phi(v_i(k)) - f(\cdot)). \end{aligned} \quad (5)$$

取 $(\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot), \dots, \alpha_n(\cdot))^T = u(k) = G^{-1}(\cdot)(\Phi(v_i(k)) - f(\cdot))$,

则将(1)式中的 $u_j(k)$ 用(5)式代替并取 $\beta_i = d_i$, 得

$$y(k + \beta_i) = \varphi_i(v_i(k)) = \varphi_i(\tilde{y}_i(k), v_i(k)).$$

由于 $G(\cdot)$ 在 $\mathcal{Y} \times \mathcal{U}$ 上处处非奇异, 所以 $G^{-1}(\cdot)$ 在 $\mathcal{Y} \times \mathcal{U}$ 上处处存在, 又因为 G, Φ, f 的元素均可微, 所以 $G^{-1}(\cdot)(\Phi - f)$ 是 $\mathcal{Y} \times \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ 上的可微函数. (4)式两边对 $v_i(k)$ 求导得

$$G \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial v_i} \right) = \text{diag} \left(\frac{d\varphi_i}{dv_i} \right).$$

$\frac{d\varphi_i}{dv_i}$ 在 \mathcal{V} 上处处不为零, 所以 $\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial v_i} \right)$ 在 $\mathcal{Y} \times \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ 上处处非奇异.

b) 必要性. 若(1)式可解耦则必存在 $u_i(k) = \alpha_i(\cdot), \beta_i$ 及 $\varphi_i(\tilde{y}_i(k), v_i(k))$ 使(4)式成立, 且 $\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial v_i} \right)$ 在 $\mathcal{Y} \times \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ 上处处非奇异, $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial v_i} \right)$ 在 $\mathcal{Y} \times \mathcal{V}$ 上处处非零. 将(4)式中的 $u_j(k)$ 用 $\alpha_j(\cdot)$ 代替有

$$f_i(\cdot) + \sum_{j=1}^n g_{ij}(\cdot) \alpha_j(\cdot) = \varphi_i(\tilde{y}_i(k), v_i(k)).$$

上式对 $v_i(k)$ 求偏导得

$$G(\cdot) \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial v_i} \right) = \text{diag} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial v_i} \right). \quad (6)$$

由于 $\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial v_i} \right)$ 处处非奇异, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial v_i}$ 又处处非零. 从(6)式可知 $G(\cdot)$ 在 $\mathcal{Y} \times \mathcal{U}$ 上处处非奇异.

推论1. 若系统(1)按本文定义可解耦, 则解耦后的系统可为线性系统.

证明. 在上面定理证明中, 可选 $\varphi_i(v_i(k))$ 为线性函数, 例如: $\varphi_i(v_i(k)) = v_i(k), (i = 1, 2, \dots, n)$, 则解耦后方程为

$$y_i(k + d_i) = v_i(k), (i = 1, 2, \dots, n).$$

推论2. 若系统(1)按本文定义可解耦, 则解耦后的系统的极点可任意配置.

证明. 同推论1的证明, 取

$$\varphi_i(\tilde{y}_i(k), v_i(k)) = P_i(z^{-1})y_i(k) + v_i(k).$$

$P_i(z^{-1})$ 为阶次不大于 p_i 的多项式, z^{-1} 为时间延迟算子, 解耦后的系统为

$$y_i(k + d_i) = P_i(z^{-1})y_i(k) + v_i(k), (i = 1, 2, \dots, n),$$

通过选择 $P_i(z^{-1})$ 的系数来任意配置极点.

4 神经网络解耦策略

从上节的理论结果知, 要使图1中系统的输出 y_i 只与新控制量 v_i 有关, 只要 NN 能够逼近 $\alpha_i(\cdot) (i = 1, 2, \dots, n)$ 这 n 个连续函数就行, 并且可按具体问题要求给定 $\varphi(\cdot)$, 而让解耦后的方程为

$$y_i(k + d_i) = \varphi_i(\tilde{y}_i(k), v_i(k)), (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

若系统(1)可解耦,且假定(1)是已知的,则可用以下方法训练神经网络 NN :

- a) 选定 $\varphi_i(\hat{y}_i(k), v_i(k))$.
- b) 在一定范围内随机产生控制量序列 $\{v_i(k)\}_{k=1}^{n_{\text{tr}}}$ 并用方程(7)产生相应的期望输出序列 $\{y_i^*(k)\}_{k=1}^{n_{\text{tr}}}$.
- c) 如图1所示, NN 用一多层前馈网络,先随机给 NN 赋初始权值.
- d) $k < 0$ 时, $u_i(k) = 0$, $k < d_i$ 时, $y_i(k) = 0$.
- e) 任一时刻 k , 用 $(\hat{y}(k), \tilde{u}(k), v(k))$ 作为网络的输入, 网络的输出作为被控对象的输入 $u_i(k)$. 并将其代入数学模型(1)求出对象的输出 $y_i(k+d_i)$. 取误差函数为

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i(k+d_i) - y_i^*(k+d_i))^2.$$

用 BP 算法训练图1中的神经网络 NN . 直到误差函数足够小.

当误差足够小时,图1中 y_i 与 v_i 的关系近似于用于产生训练数据的方程(7). 但是当方程(1)未知时,只有在知道方程(1)的阶次、延时的条件下,先用神经网络建立被控对象的模型. 文献[4]已提供了很多有效的建模方法. 用建好的模型取代图1中的 Plant 块. 再用以上方法训练图1中的 NN 网络.

5 仿真研究

选用非线性系统(8)为被控对象

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= u_1(k) + 0.8y_2(k), \\ y_2(k+1) &= 0.7u_2(k) + 0.25u_1(k) + 0.9\sin(3y_1(k)), \end{aligned} \quad (8)$$

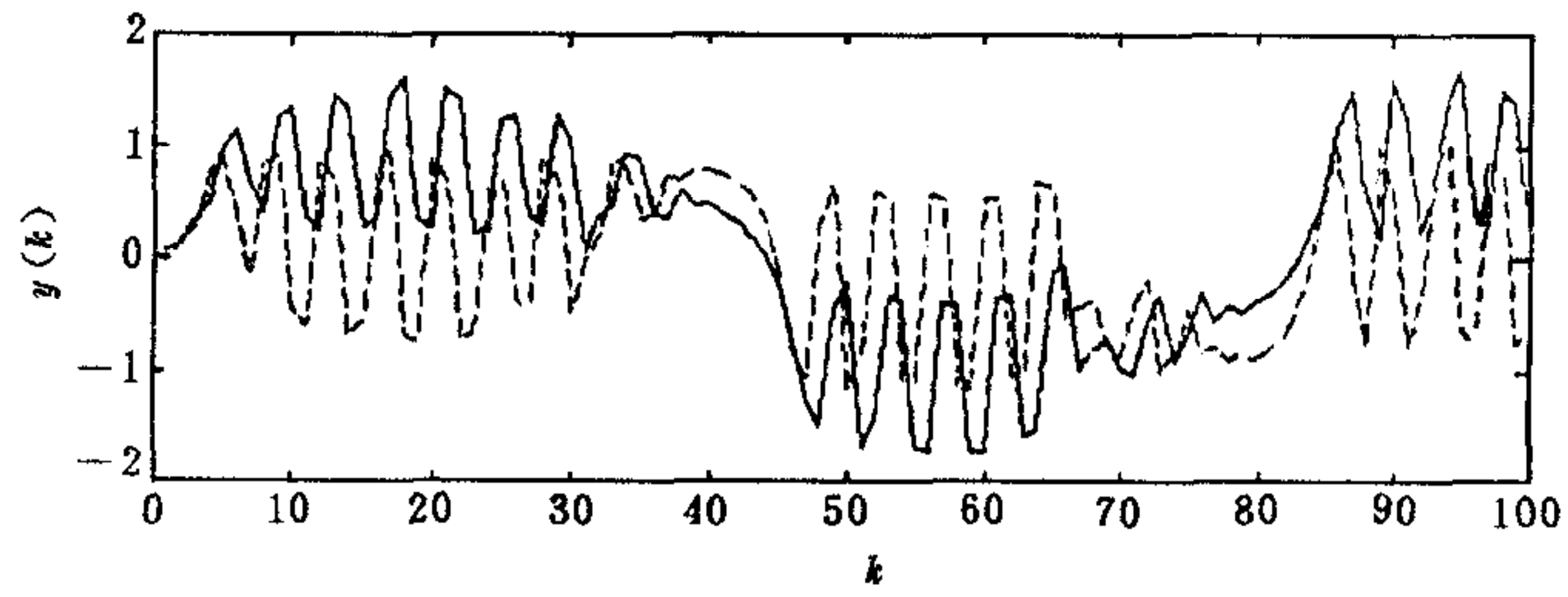
假设系统动态方程(8)已知. 用一个三层前馈网络实现补偿器功能. 该网络4个输入单元在 k 时刻分别输入 $(v_1(k), v_2(k), y_1(k), y_2(k))$, 隐层10个非线性单元, 激发函数为 $(e^x - e^{-x}) / (e^x + e^{-x})$. 输出层为两个线性单元, 要求解耦后的系统为

$$\begin{cases} y_1(k+1) = v_1(k), \\ y_2(k+1) = v_2(k) \end{cases} \quad (9)$$

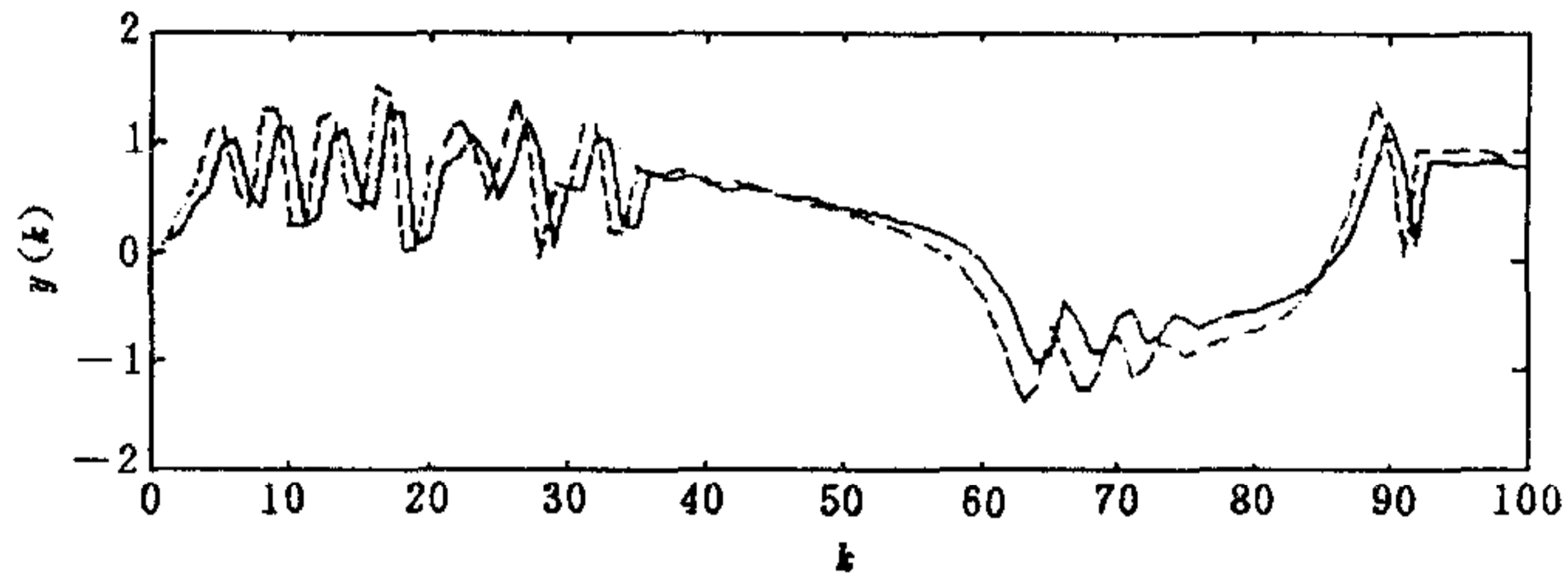
采用上节中给出的算法,先用方程(9)随机取 $\{v_1(k)\}_{k=1}^{100}$, $\{v_2(k)\}_{k=1}^{100}$, (限定在 $(-1, 1)$ 区间上), 产生相应的 $\{y_1^*(k)\}_{k=2}^{101}$, $\{y_2^*(k)\}_{k=2}^{101}$. 组织成100个训练样本, 训练迭代600次后平均相对误差 $< 5\%$. 为验证加上补偿器后的系统特性, 将原系统的一个控制量给成常值而让另一个变化, 系统输出量的变化在图2中给出. 可以看出耦合很强且振动很大.

对解耦后的系统也做同样试验, 其输出在图3中与设定系统(9)在同样控制量作用下的输出进行了比较. 可以看出新系统耦合很小, 且与设定系统相差很小.

本文给出了系统(1)可解耦的一个充要条件并证明若它可解耦则可解耦成线性系统且极点可任意配置, 提出了一个神经网络解耦策略并通过仿真实现.

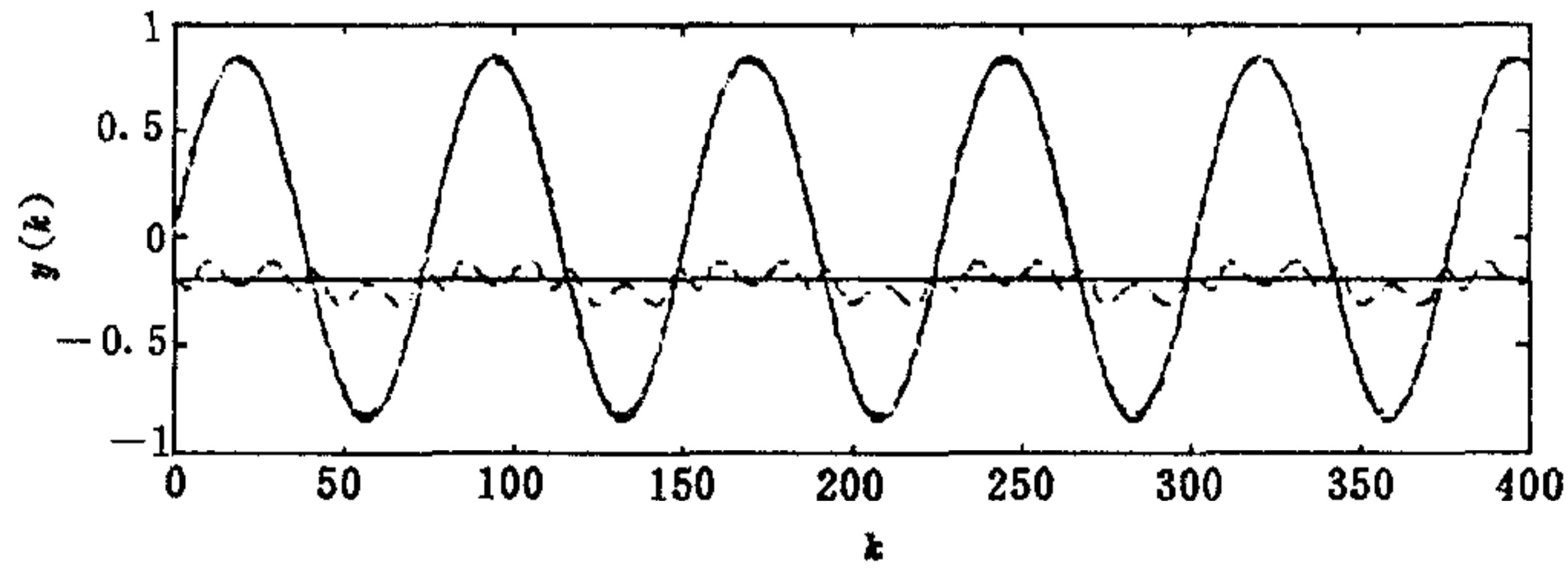


(a) $u_1(k)=0.85 \sin(k/12), u_2(k)=-0.1$ 时原系统输出
—— $y_1(k), \dots, y_2(k)$

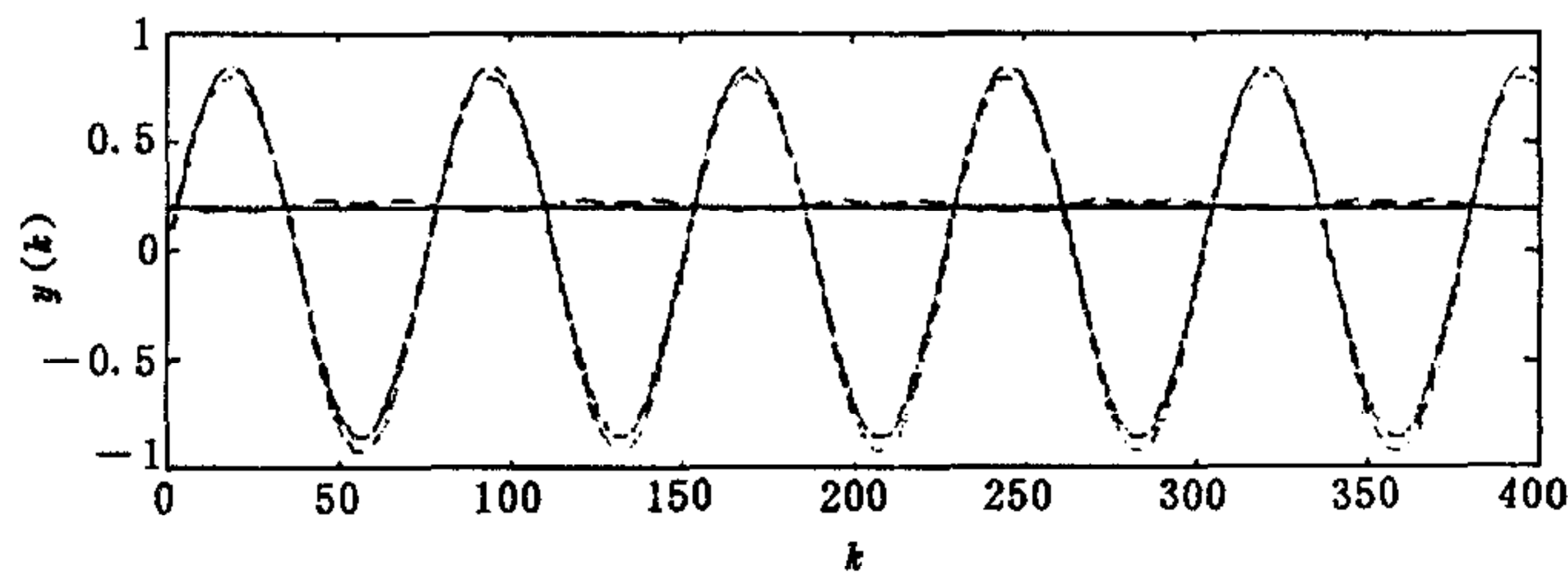


(b) $u_1(k)=0.1, u_2(k)=0.85 \sin(k/12)$ 时原系统输出
—— $y_1(k), \dots, y_2(k)$

图2



(a) $v_1(k)=0.85 \sin(k/12), v_2(k)=0.2$ 时新系统与设定系统比较
——设定系统输出, \dots 新系统输出



(b) 各线表示与图3(a)同, 只是 $v_1(k)=0.2, v_2(k)=0.85 \sin(k/12)$

图3

参 考 文 献

- [1] Grizzle J W. Local input-output decoupling of discrete time nonlinear systems. *International Journal of Control*, 1986, **43**(6):1517—1530.
- [2] Nijmeuer H. Local (dynamic) input-output decoupling of discrete time nonlinear systems. *IMA Journal of Mathematics Control & Information*, 1987, **4**(3):237—250.
- [3] Fliess M. Esquisses pour une théorie des systèmes non linéaires en temps discret. In: Proceedings of Conference on Linear and Nonlinear Mathematical Control Theory, Torino, 1986, 432—437.
- [4] Narendra K S, Parthasarathy K. Identification and control of dynamical systems using neural networks. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 1990, **1**(1):4—27.

A NEURAL NETWORK DECOUPLING STRATEGY FOR A CLASS OF NONLINEAR DISCRETE TIME SYSTEMS

WU LIMING CHAI TIANYOU

(Research Center for Automation, Northeastern University, Shenyang 110006)

Abstract A neural network is considered to be used as a compensator for input-output decoupling of a class of nonlinear discrete time systems. A necessary and sufficient condition for the solvability of the decoupling problem for the class of discrete time systems is given. It is also shown that if the decoupling problem is solvable, the modified systems can be linear and the poles of the modified systems can be freely assigned. Based on this result, a strategy for realizing decoupling via neural networks is proposed. Simulation results supports our theory and the decoupling strategy proposed in this paper.

Key words Neural network, compensator, decoupling, pole placement, nonlinear discrete time systems.

吴黎明 1964年生于湖北广水,1986和1989年在北京大学分别获得理学学士和硕士学位.1995年在东北大学获工学博士学位.现为沈阳建工学院副教授.研究方向为人工神经网络动力学及其在控制方面的应用.

柴天佑 简历见本刊第17卷第2期