

# 广义离散随机线性系统最优递推预报 方法及其渐近稳定性

张焕水 柴天佑

(东北大学自动化研究中心 沈阳 110006)

**摘要** 讨论广义离散随机线性系统最优状态估计问题,运用新息理论和射影的方法提出了广义离散随机线性系统最优递推预报器和滤波器,证明了递推预报器对于初始值的选取渐近稳定.

**关键词** 广义离散随机线性系统,最优递推预报器,滤波器,稳定性.

## 1 引言

广义离散随机线性系统状态估计研究近来受到许多学者的关注,文献[1—3]采用最小二乘法和 Kalman 滤波方法研究问题,得到了广义离散随机线性系统最优滤波估计的一系列新结果.但是,由于系统的非因果性,预报估计很困难<sup>[1]</sup>.对此本文基于时域上的新息分析方法研究问题,提出了广义系统最优递推预报估计方法,同时得到了滤波估计的新方法.

已知广义离散随机线性系统

$$Mx(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma w(k), \quad (1.1)$$

$$y(k) = Hx(k) + v(k), \quad (1.2)$$

其中  $x(k) \in R^n, w(k) \in R^r, y(k) \in R^m, v(k) \in R^m$  分别表示系统的状态矢量、模型噪声矢量、观测噪声矢量、观测噪声.  $M, \Phi, \Gamma, H$  分别为相应维数的矩阵.  $w(k), v(k)$  是零均值不相关高斯白噪声序列.  $Ew(k) = 0, Ev(k) = 0, Ew(k)w^T(i) = Q_w \delta_{ki}, Ev(k)v^T(i) = Q_v \delta_{ki}, Ew(k)v^T(i) = 0, \forall k, i.$

**假设1.** 系统满足完全观测,即任意  $z$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} zM - \Phi \\ H \end{bmatrix} = n, z \text{ 有限}, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} M \\ H \end{bmatrix} = n.$$

**假设2.** 系统正则,即  $\det(zM - \Phi) \neq 0.$

最优预报估计问题: 基于观测  $y(k-1), y(k-1), \dots, y(0)$  求状态  $x(k)$  的线性最优估值  $\hat{x}(k|k-1)$  极小化性能指标

$$J = E((x(k) - \hat{x}(k|k-1))^T (x(k) - \hat{x}(k|k-1))). \quad (1.3)$$

## 2 最优递推预报器

### 2.1 系统(1.1),(1.2)的等价形式

由假设1,  $\text{rank} \begin{bmatrix} M \\ H \end{bmatrix} = n$ , 则存在一矩阵  $K_0$  使得  $(M + K_0 H)$  满秩<sup>[4]</sup>, 由(1.1),(1.2)式得

$$(M + K_0 H)x(k) = \Phi x(k-1) + K_0 y(k) + \Gamma w(k-1) - K_0 v(k).$$

由于  $(M + K_0 H)$  满秩, 因此(1.1),(1.2)式可以等价地写成如下系统:

$$x(k) = Ax(k-1) + Ky(k) + \eta(k-1), \quad (2.1)$$

$$y(k) = Hx(k) + v(k), \quad (2.2)$$

其中  $A = S\Phi$ ,  $K = SK_0$ ,  $\eta(k-1) = S\Gamma w(k-1) - Kv(k)$ ,  $S = (M + K_0 H)^{-1}$ .

**引理1.**  $(A H)$  是可观测对, 即  $\Omega = (H^T, A^T H^T, \dots, (A^T)^{n-1} H^T)^T$  列满秩.

### 2.2 ARMA 新息模型

由(1.1),(1.2)式得

$$y(k) = H(M - \Phi q^{-1})^{-1} \Gamma w(k-1) + v(k). \quad (2.3)$$

在假设1下, 由广义系统的标准分解知  $(M - \Phi q^{-1})^{-1}$  存在, 并且具有如下形式:

$$(M - \Phi q^{-1})^{-1} = \frac{(\bar{F}_0 + \bar{F}_1 q^{-1} + \dots + \bar{F}_{n_1-1} q^{-(n_1-1)}) q^{r_0}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_2} q^{-n_2}}, \quad (2.4)$$

$r_0$  是标准分解中幂零阵的幂零指数, 系统含有脉冲模时  $r_0 > 1$ , 无脉冲模时  $r_0 = 1$ . 将(2.4)式代入(2.3)式得

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})w(k + r_0 - 1) + A(q^{-1})v(k), \quad (2.5)$$

其中  $A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_2} q^{-n_2}$ ,  $B(q^{-1}) = B_0 + B_1 q^{-1} + \dots + B_{n_1-1} q^{-(n_1-1)}$ ,  $B_i = H\bar{F}_i \Gamma$ . 上式中系数阵有些可能为零, 不妨设  $i > r$  时,  $B_i = 0$ ,  $B_r \neq 0$ ,  $B_{n_1-1} \neq 0$ , 则有

$$A(q^{-1})y(k) = C(q^{-1})w(k + n_0 - 1) + A(q^{-1})v(k), \quad (2.6)$$

其中  $C(q^{-1}) = C_0 + C_1 q^{-1} + \dots + C_{n_1-r-1} q^{-(n_1-r-1)}$ ,  $C_i = B_{r+i}$ ,  $n_0 = r_0 - r$ .

**假设3.** 谱密度阵  $C(e^{-i\omega})Q_w C^T(e^{i\omega}) + A(e^{-i\omega})Q_v A^T(e^{i\omega})$  正定 ( $-\pi \leq \omega \leq \pi$ ).

在假设3下, (2.6)式右边的两个 MA 滑动平均过程可以用唯一稳定的 MA 过程表示

$$D(q^{-1})\varepsilon(k) = C(q^{-1})w(k + n_0 - 1) + A(q^{-1})v(k), \quad (2.7)$$

其中  $D(q^{-1}) = I_m + D_1 q^{-1} + \dots + D_{n_d} q^{-n_d}$ ,  $n_d = \max(n_1 - r_1 - 1, n_2)$ ,  $D(q^{-1})$  稳定.  $\varepsilon(k)$  是零均值的白噪声序列, 方差阵为  $Q_\varepsilon$ ,  $\varepsilon(k)$  是观测  $y(k)$  的新息, 即一步预报误差. 由(2.6), (2.7)式得 ARMA 新息模型

$$A(q^{-1})y(k) = D(q^{-1})\varepsilon(k). \quad (2.8)$$

新息计算如下:

$$\varepsilon(k) = A(q^{-1})y(k) - D_1 \varepsilon(k-1) - \dots - D_{n_d} \varepsilon(k - n_d), \quad (2.9)$$

初始值为  $\varepsilon(0), \dots, \varepsilon(n_d - 1)$ .

**引理2.** 新息  $\varepsilon(k)$  与  $w(k), v(k), y(k)$  的互协方差阵计算如下:

$$Ew(k)\varepsilon^T(k-i) = Q_w F_{n_0-i-1}^T, \quad Ev(k)\varepsilon^T(k-i) = Q_v E_{-i}^T, \quad Ey(k)\varepsilon^T(k-i) = \Lambda_i Q_\varepsilon,$$

其中  $F_i, E_i, \Lambda_i$  由下式计算:

$$F_i = - \sum_{j=1}^{\min(n_d, i)} D_j F_{i-j} + C_i, \quad E_i = - \sum_{j=1}^{\min(n_d, i)} D_j E_{i-j} + a_i I_m, \quad \Lambda_i = - \sum_{j=1}^{\min(n_d, i)} a_j \Lambda_{i-j} + D_i, \quad (2.10)$$

其中  $F_0 = C_0, E_0 = I_m, \Lambda_0 = I_m$ .

### 2.3 最优递推预报器

**定理1.** 在假设1—3下,系统(1.1),(1.2)式的最优递推预报器为

$$\begin{aligned} \hat{x}(k|k-1) &= A \hat{x}(k-1|k-2) + K_p \epsilon(k-1) \\ &\quad + K \hat{y}(k|k-2) + \hat{\eta}(k-1|k-2), \end{aligned} \quad (2.11)$$

初始值为  $\hat{x}(1|0)$ . 其中  $\hat{y}(k|k-2)$  由以下两式计算:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k-1|k-2) &= -a_1 y(k-2) - \cdots - a_{n_2} y(k-n_2-1) + D_1 \epsilon(k-2) \\ &\quad + \cdots + D_{n_d} \epsilon(k-n_d-1), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}(k|k-2) &= -a_1 \hat{y}(k-1|k-2) - a_2 y(k-2) - \cdots - a_{n_2} y(k-n_2) \\ &\quad + D_2 \epsilon(k-2) + \cdots + D_{n_d} \epsilon(k-n_d). \end{aligned} \quad (2.13)$$

$\hat{\eta}(k-1|k-2), K_p$  分别计算为

$$\hat{\eta}(k-1|k-2) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n_0-2} S \Gamma Q_w F_i^T Q_\epsilon^{-1} \epsilon(k-n_0+i), & n_0 \geq 2, \\ 0, & n_0 < 2, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$K_p = \Omega^\# \times \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 - H K \Lambda_2 - H S \Gamma Q_w F_{n_0-2}^T Q_\epsilon^{-1} \\ \vdots \\ \Lambda_n - \sum_{i=0}^{n-2} H A^{n-i-2} (K \Lambda_{i+2} + S \Gamma Q_w F_{n_0-i-2}^T Q_\epsilon^{-1}) \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

其中  $\Omega^\# = (\Omega^T \Omega)^{-1} \Omega^T$ .

**证明.** 由射影理论<sup>[5]</sup>,线性最小方差估计  $\hat{x}(k|k-2)$  是  $x(k)$  在由新息  $\epsilon(k-2), \epsilon(k-3), \dots, \epsilon(0)$  所张成的线性流形上的正交射影,取(2.1)式两边各项在以上线性流形上的射影运算得

$$\hat{x}(k|k-2) = A \hat{x}(k-1|k-2) + K \hat{y}(k|k-2) + \hat{\eta}(k-1|k-2). \quad (2.16)$$

由正交射影公式知

$$\begin{aligned} \hat{x}(k|k-1) &= \text{Proj}\{x(k) | \epsilon(k-1), \epsilon(k-2), \dots, \epsilon(0)\} \\ &= \text{Proj}\{x(k) | \epsilon(k-2), \epsilon(k-3), \dots, \epsilon(0)\} \\ &\quad + E(x(k) \epsilon^T(k-1)) Q_\epsilon^{-1} \epsilon(k-1) \\ &= \hat{x}(k|k-2) + K_p \epsilon(k-1), \end{aligned} \quad (2.17)$$

其中  $K_p = E(x(k) \epsilon^T(k-1)) Q_\epsilon^{-1}$  是一步预报增益阵. 现计算  $K_p$ . 由(2.1),(2.2)式得如下关系:

$$\begin{bmatrix} H \\ HA \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{bmatrix} x(k) = \begin{bmatrix} y(k) - v(k) \\ y(k+1) - HKy(k+1) - H\eta(k) - v(k+1) \\ \vdots \\ y(k+n-1) - \sum_{i=0}^{n-2} HA^{n-i-2}(Ky(k+i+1) + \eta(k+i)) - y(k+n-1) \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

根据引理2,将(2.18)式两边同时右乘  $\epsilon^T(k-1)Q_\epsilon^{-1}$  取数学期望知  $K_p$  满足如下关系式:

$$\begin{bmatrix} H \\ HA \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{bmatrix} K_p = \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 - HK\Lambda_2 - HS\Gamma Q_w F_{n_0-2}^T Q_\epsilon^{-1} \\ \vdots \\ \Lambda_n - \sum_{i=0}^{n-2} HA^{n-i-2}(K\Lambda_{i+2} + S\Gamma Q_w F_{n_0-i-2}^T Q_\epsilon^{-1}) \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

由上式得(2.15)式.

由(2.16)式代入(2.17)式,则得(2.11)式.

由 ARMA 新息模型(2.8)取射影运算直接得到(2.12),(2.13)式.注意到  $\eta(k-1) = S\Gamma w(k-1) - Kv(k)$ ,由引理2知, $n_0 < 2$ 时,  $\hat{\eta}(k-1|k-2) = 0$ , $n_0 \geq 2$ 时,由射影公式计算为

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(k-1|k-2) &= \sum_{i=n_0}^2 E(\eta(k-1)\epsilon^T(k-i))Q_\epsilon^{-1}\epsilon(k-i) \\ &= \sum_{i=0}^{n_0-2} S\Gamma Q_w F_i^T Q_\epsilon^{-1}\epsilon(k-n_0+i). \end{aligned}$$

证毕.

说明.仿照(2.11)式的推导方法,用(1.1)式易得

$$M\hat{x}(k|k-1) = \Phi\hat{x}(k-1|k-2) + MK_p\epsilon(k-1) + \Gamma\hat{w}(k-1|k-2). \tag{2.20}$$

类似(2.14)式, $\hat{w}(k-1|k-2)$ 的计算为

$$\hat{w}(k-1|k-2) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n_0-2} Q_w F_i^T Q_\epsilon^{-1}\epsilon(k+i-n_0), & n_0 \geq 2, \\ 0, & n_0 < 2. \end{cases}$$

$M$ 可逆时,(2.20)式与正常系统的稳态 Kalman 预报器一致.事实上, $M$ 可逆时(1.1)式变为

$$x(k+1) = M^{-1}\Phi x(k-1) + M^{-1}\Gamma w(k-1). \tag{2.21}$$

(2.20)式变为

$$\hat{x}(k|k-1) = M^{-1}\Phi\hat{x}(k-1|k-2) + K_p\epsilon(k-1) + M^{-1}\Gamma\hat{w}(k-1|k-2). \tag{2.22}$$

由于  $M$ 可逆时,显然  $n_0 \leq 0$ ,故  $\hat{w}(k-1|k-2) = 0$ ,因此(2.22)式变为

$$\hat{x}(k|k-1) = M^{-1}\Phi\hat{x}(k-1|k-2) + K_p\epsilon(k-1). \tag{2.23}$$

上式正是系统(2.21)的稳态 Kalman 预报器,  $K_p$  是稳态预报增益阵.

下面讨论广义系统最优滤波估计问题. 基于以上提出的最优递推预报器, 系统的最优滤波器为

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + K_f \boldsymbol{\varepsilon}(k), \quad (2.24)$$

其中  $K_f = E(\mathbf{x}(k)\boldsymbol{\varepsilon}^T(k))Q_\varepsilon^{-1}$ , 仿照  $K_p$  计算的方法,  $K_f$  计算为

$$K_f = \Omega^\# \times \begin{bmatrix} I_m - Q_\nu Q_\varepsilon^{-1} \\ \Lambda_1 - HK\Lambda_1 - HST\Gamma Q_w F_{n_0-1}^T Q_\varepsilon^{-1} \\ \vdots \\ \Lambda_{n-1} - \sum_{i=0}^{n-2} HA^{n-i-2}(K\Lambda_{i+1} + ST\Gamma Q_w F_{n_0-i-1}^T Q_\varepsilon^{-1}) \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

根据(2.1)式及引理2, 易证  $K_p$  与  $K_f$  有如下关系:

$$K_p = AK_f + K\Lambda_1 + ST\Gamma Q_w F_{n_0-1}^T Q_\varepsilon^{-1}. \quad (2.26)$$

### 3 渐近稳定性

**定理2.** 假设矩阵  $A$  稳定, 则定理1提出的最优递推预报器(2.11)对于初始值  $\boldsymbol{\varepsilon}(0)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}(1), \dots, \boldsymbol{\varepsilon}(n_d-1)$ ,  $\hat{\mathbf{x}}(1|0)$  选取渐近稳定

证略.

说明. 若  $A$  不稳定, 由于  $(A \ H)$  是可观测对, 因此存在矩阵  $T_0 \in R^{n \times m}$  使得  $A + T_0 H$  稳定. 利用射影性质由(1.2)式得

$$\hat{\mathbf{y}}(k-1|k-2) = H\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-2). \quad (3.1)$$

由于(3.1), (2.11)式得

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) &= \bar{A}\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-2) + K_p \boldsymbol{\varepsilon}(k-1) + K\hat{\mathbf{y}}(k|k-2) \\ &\quad - T_0 \hat{\mathbf{y}}(k-1|k-2) + \hat{\boldsymbol{\eta}}(k-1|k-2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中  $\bar{A} = A + T_0 H$  稳定,  $\hat{\mathbf{y}}(k-1|k-2)$  由(2.12)式计算. 易证最优递推预报估计(3.2)对于初始值的选取渐近稳定. 因此当  $A$  非稳定时, 定理1给出的最优递推预报估计用(3.2)式代替以保证其渐近稳定性.

### 4 仿真例子

考虑系统

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k-1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{w}(k-1), \quad (4.1)$$

$$y(k) = [0 \ 1] \mathbf{x}(k) + v(k), \quad (4.2)$$

$\mathbf{w}(k), v(k)$  是零均值不相关白噪声序列,  $Q_w = Q_\nu = 1$ . 本例中取  $K_0 = [0 \ 1]^T$ . 易知 ARMA 新息模型为

$$(1 - 0.9q^{-1})y(k) = (1 + dq^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}(k), \quad (4.3)$$

其中  $d$  和  $Q_\varepsilon$  分别为  $d = -0.1588, Q_\varepsilon = 5.667$ . 最优预报器和滤波器分别为

$$\hat{x}(k|k-1) = A\hat{x}(k-1|k-2) + K_p \epsilon(k-1) + K\hat{y}(k|k-2), \quad (4.4)$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K_f \epsilon(k). \quad (4.5)$$

其中

$$K = K_0, \quad A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad K_p = \begin{bmatrix} 0.5(0.9 + d) \\ 0.9 + d \end{bmatrix}, \quad K_f = \begin{bmatrix} 0.5(1 - Q_\epsilon^{-1}) \\ 1 - Q_\epsilon^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\hat{y}(k-1|k-2) = 0.9y(k-2) + d\epsilon(k-2), \quad \hat{y}(k|k-2) = 0.9\hat{y}(k-1|k-2).$$

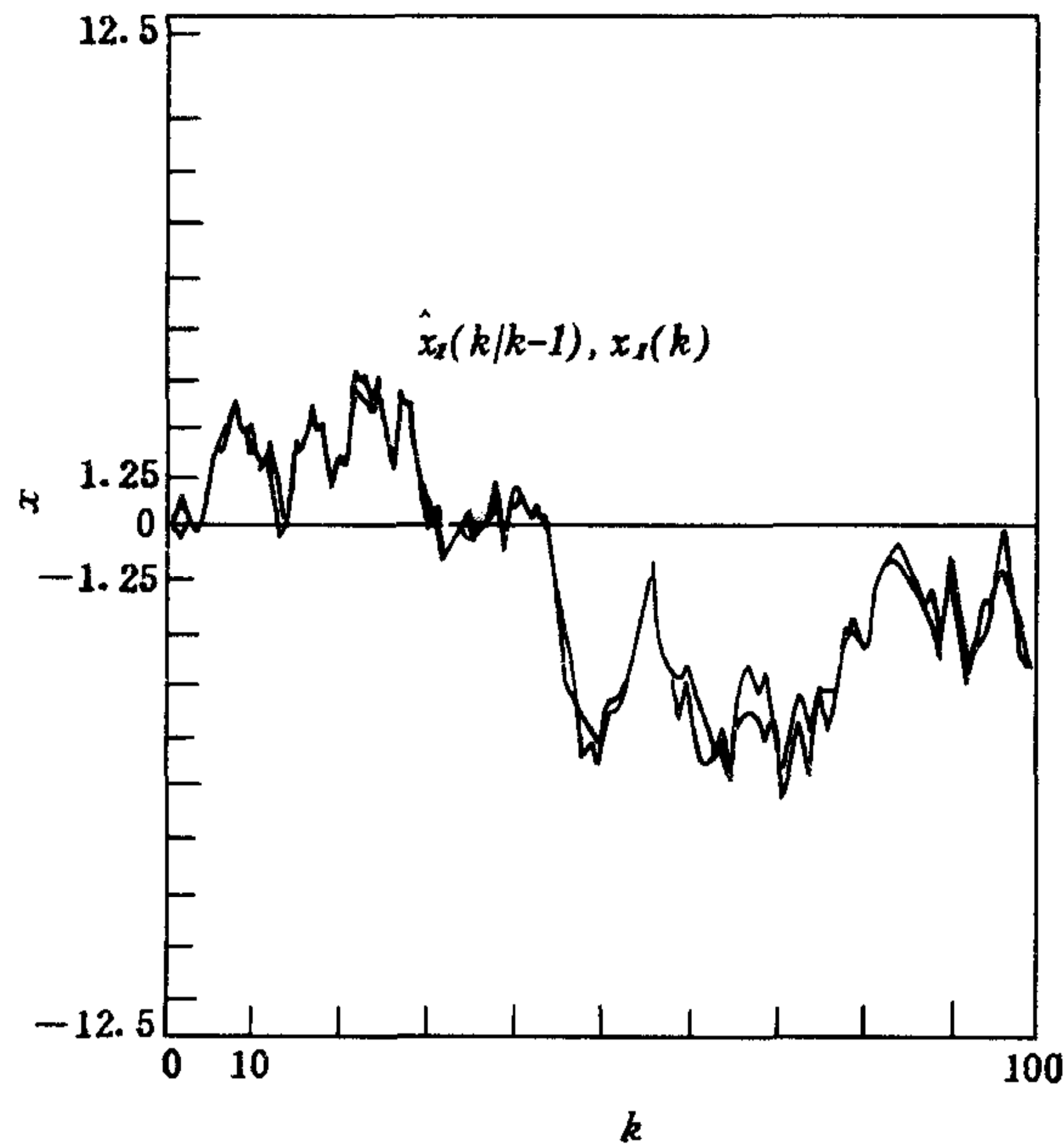


图1  $x_1(k)$ 及最优预报  $\hat{x}_1(k|k-1)$

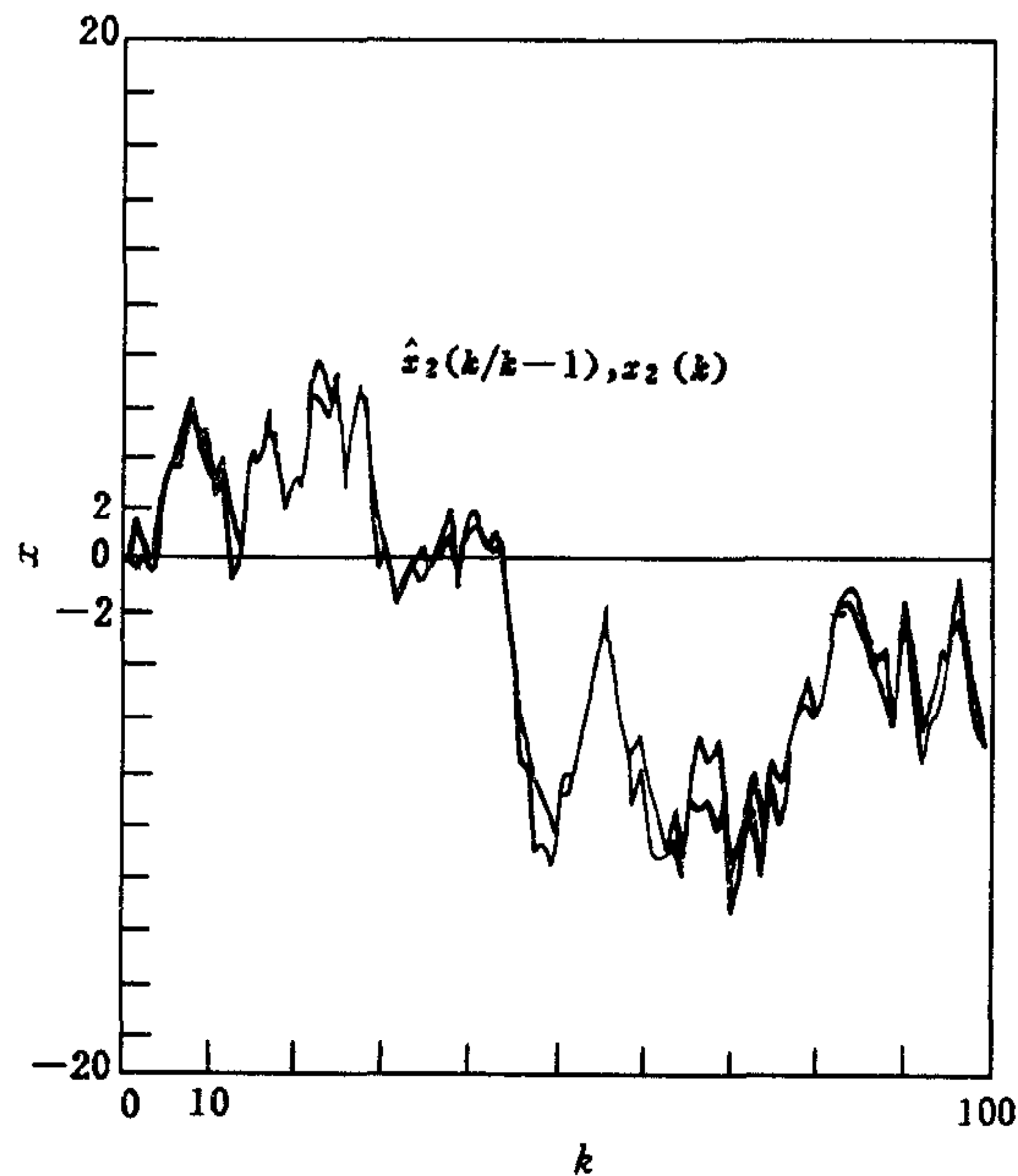


图2  $x_2(k)$ 及最优预报  $\hat{x}_2(k|k-1)$

仿真结果见图1—4. 图1,2表明最优预报估计  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = [\hat{x}_1(k|k-1) \quad \hat{x}_2(k|k-1)]^T$  对真实值  $\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \quad x_2(k)]^T$  具有良好的跟踪性能. 图3,4表明最优滤波估计  $\hat{\mathbf{x}}(k|k) = [\hat{x}_1(k|k) \quad \hat{x}_2(k|k)]^T$  对于真实值  $\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \quad x_2(k)]^T$  具有良好的跟踪性能.

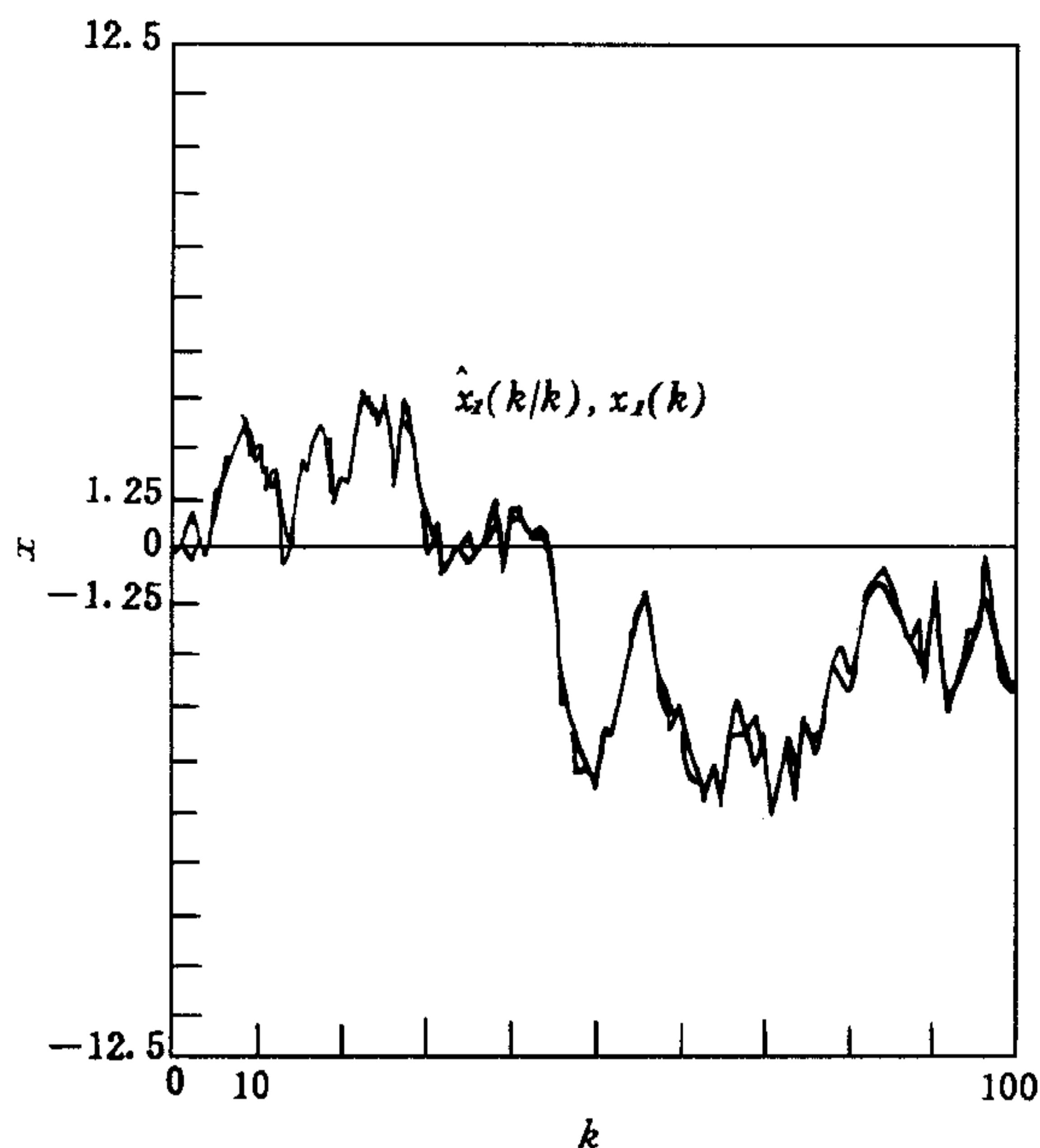


图3  $x_1(k)$ 及最优滤波  $\hat{x}_1(k|k)$

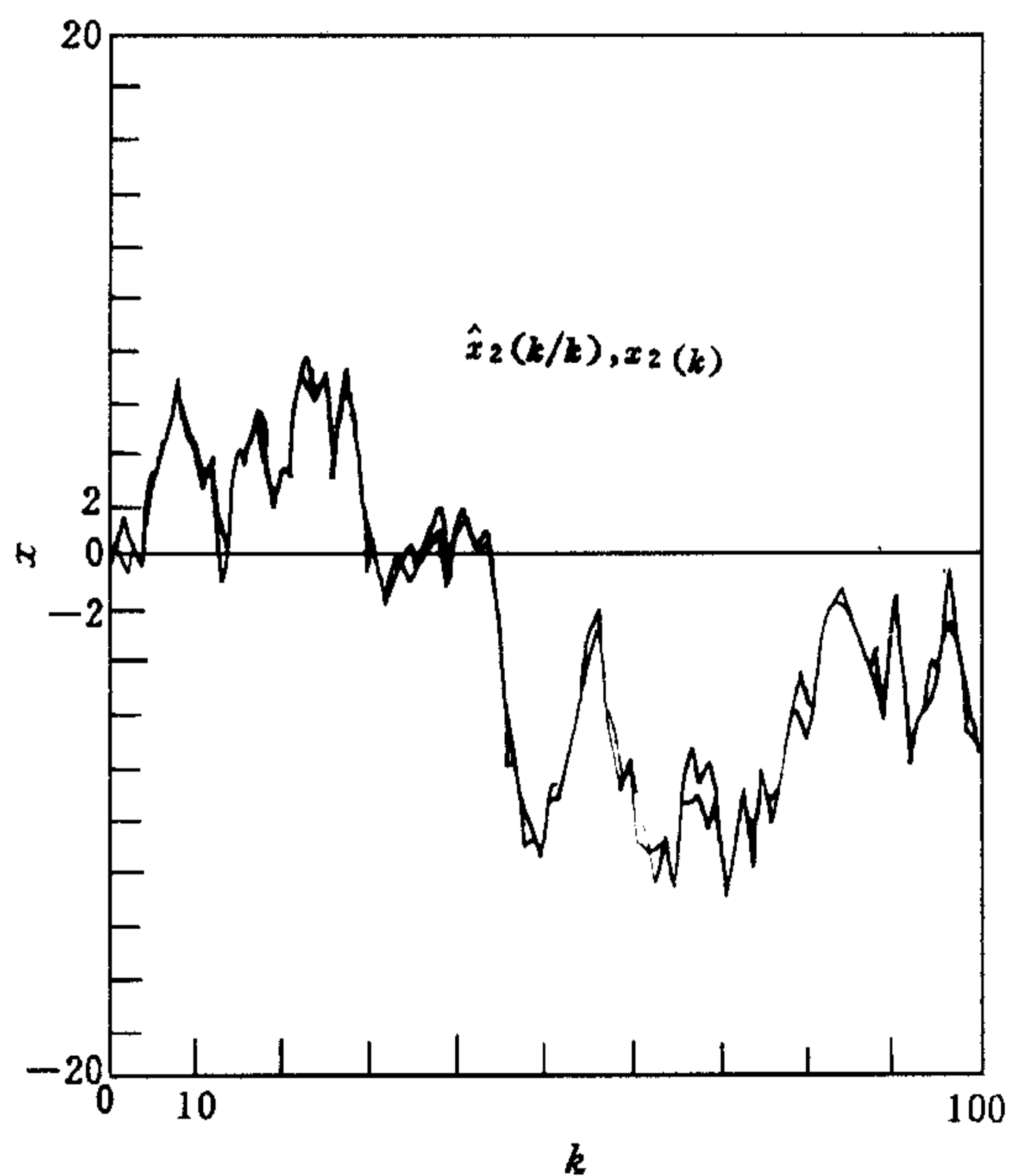


图4  $x_2(k)$ 及最优滤波  $\hat{x}_2(k|k)$

本文运用新息理论和射影方法,借助于输出预报估计提出了广义离散随机线性系统

最优递推预报器. 基于最优预报器提出了广义系统最优滤波估计新方法. 作为特殊情况, 本文的结果可用于处理正常系统的状态估计.

### 参 考 文 献

- [1] 王恩平, 王朝珠. 广义离散随机线性系统的最优递推滤波方法(1). 自动化学报. 1988, **14**(6):409—415.
- [2] Dai L. Filtering and LQG problem for discrete-time stochastic singular systems. *IEEE. Trans Automat, Control*. 1989, **34**:1105—1108.
- [3] 秦超英, 戴冠中. 采用奇异值分解设计广义系统的最优滤波器. 控制理论与应用. 1994, **11**(2):177—181.
- [4] 王跃云, 金钟骥, 张钟俊. 广义系统的反馈控制与极点配置方法. 自动化学报. 1988, **14**(4):284—288.
- [5] Deng ZL, Zhang HS, Liu SJ, Zhou L. Optimal and self-tuning white noise estimators with applications to deconvolution and filtering problems. *Automatica*. **32**:199—216.

## THE OPTIMAL RECURSIVE PREDICTING METHOD FOR THE SINGULAR DISCRETE STOCHASTIC SYSTEM AND ITS ASYMPTOTIC STABILITY

ZHANG HUANSHUI CHAI TIANYOU

(Research Center of Automation, Northeastern University, Shenyang 110006)

**Abstract** This paper deals with the optimal state estimation for the singular discrete stochastic linear system. The optimal recursive predictor and the optimal filter for the singular discrete stochastic linear system are presented by using the innovation theory and projection method, and the asymptotic stability of the optimal predictor is proved.

**Key words** Singular discrete stochastic linear system, optimal recursive predictor, filter, stability.

张焕水 简历见本刊第22卷第1期

柴天佑 简历见本刊第17卷第2期