第 23 卷 第 1 期
1997 年 1 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 23, No. 1
January, 1997

短 文

随机加工参数串行生产线的性能估计[1)]

赵千川 郑大钟
（清华大学自动化系 北京 100084）

摘 要 研究加工参数服从一般分布，重复批量加工 n 种不同工件的随机串行生产线．给出了一个稳态加工周期的存在性条件，得到稳态加工周期、生产率、机器利用率的上下估界．

关键词 串行生产线，极大代数．

1 引言

本文研究同一批次包含 n 种不同工件的有限缓冲随机串行生产线．在较为一般的条件下证明了稳态加工周期的存在性，进而得到了加工周期、生产率和机器利用率的估计式．我们的结果是文[1－4]的结果向服务时间周期平稳过程的推广，同时也是文[5]结果向随机情形的推广．

2 主要结果

串行生产线由 m 台机器 $M_0,\cdots,M_{m-1}$ 和相应的前置缓冲器组成，批加工方式，每批加工 n 种工件 $J_0,\cdots,J_{n-1}$．一批工件按种类序数依次加工．p_{ij}^k 为机器 M_i 上加工第 k 批的第 j 个工件的加工时间．不失一般性，假定生产线为刚性连接[5]．

假设 1． 对任意 $i\in\mathbf{I}=\{0,1,\cdots,m-1\}$，$j\in\mathbf{J}=\{0,1,\cdots,n-1\}$，$p_{ij}^k$ 的分布相同，$k=1,2,\cdots$，当 $k\neq l$ 或 $i\neq s$ 或 $j\neq t$ 时，p_{ij}^k 与 p_{st}^l 独立，且 $\mathbf{E}p_{ij}^k<+\infty,\forall\, i,j,k$．

命题 1． 考虑有限缓冲的生产线．假设 1 成立，则存在 λ，使成立

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}T(k)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\mathrm{E}T(k)=\lambda \qquad \text{a.s.} \tag{1}$$

其中，$T(k)$ 表示前 k 批工件加工的总时间．

证明． 用 $x_i(s-1)$，$i\in\mathbf{I}$ 代表累计第 s 个工件离开机器 M_i 的时刻．显然 $T(k)$ 就等于 $x_{m-1}(kn-1)$．任意取定满足条件 $d>(m-1)/n$ 的正整数 d，在假定 1 下，对 $y(k)=x(dk)$ 应用文[2]中定理 5，可知 $(\mathbf{E}y_{m-1}(k))/k$ 和 $(y_{m-1}(k))/k$ 以概率 1 有极限 $0\leq a<+\infty$，取 $\lambda=a/nd$ 即可导出命题．

1) 国家自然科学基金资助项目．

收稿日期 1995-07-14

约定$\otimes$,$\prod$,$\oplus$,$\sum$分别代表极大代数意义下的“乘”、“连乘”及“加”、“连加”运算.约定当$t<0$时$x_i(t)=0$,$p_{ij}^t=0$,$i\in\boldsymbol{I}$,$j\in\boldsymbol{J}$,对实数a,运算的结果$[a]$是a的整数部分,结果$\langle a\rangle_n$是n除a所得的最小非负剩余.以$\underline{\lambda}$记加工参数为$\mathbf{E}p_{ij}^k$的确定性加工过程的稳态加工周期,令$\bar{\lambda}_1=\underline{\lambda}\otimes\prod_{s=0}^{n-1}\mathbf{E}\sum_{\substack{<i+j>_n=s\\ i\in\boldsymbol{I},j\in\boldsymbol{J}}}|p_{ij}^1-\mathbf{E}p_{ij}^1|$,$\bar{\lambda}_2=\prod_{s=0}^{n-1}\mathbf{E}\sum_{\substack{<i+j>_n=s\\ i\in\boldsymbol{I},j\in\boldsymbol{J}}}p_{ij}^1$,$\bar{\lambda}=\min(\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2)$.

定理 1. 考虑有限缓冲的生产线.假设 1 成立,那么必有

$$\underline{\lambda}\leq\lambda\leq\bar{\lambda}.\qquad \text{a.s.}\tag{2}$$

证明. 由文[5]可知$\underline{\lambda}$有定义.熟知,$T(k)=x_{m-1}(kn-1)$可表示为加工参数的有限次$\otimes$和$\oplus$运算的参数化表达式.以$\underline{x}_i(kn-1)$表示以$\mathbf{E}p_{ij}^k$为参数的确定性加工过程的状态.对$T(k)$的参数化表达式递归地运用适用于二元随机变量a,b的单调关系:$\mathbf{E}a\otimes\mathbf{E}b=\mathbf{E}(a\otimes b)$和$\mathbf{E}a\oplus\mathbf{E}b\leqslant\mathbf{E}(a\oplus b)$可导出不等式

$$\mathbf{E}\underline{x}_{m-1}(kn-1)\leq\mathbf{E}x_{m-1}(kn-1).\tag{3}$$

两边除以批次k并取极限即证得下界估计式.

证上界估计式.令

$$\boldsymbol{x}(s)=[x_0(s),x_1(s-1),\cdots,x_{m-2}(s-m+2),x_{m-1}(s-m+1)]^T,$$

任取样本轨道ω,对$p_{i(\omega,s)<s-i(\omega,s)>_n}^{\left[\frac{s-i(\omega,s)}{n}\right]+1}$运用不等式$a\leqslant\mathbf{E}a+|a-\mathbf{E}a|$($a$为随机变量)结合归纳法可得递推不等式

$$\boldsymbol{x}(kn-1)\leq\underline{\boldsymbol{x}}(kn-1)\otimes\prod_{s=0}^{kn-1}\sum_{i\in\mathbf{I}}\left|p_{i<s-i>_n}^{\left[\frac{s-i}{n}\right]+1}-\mathbf{E}p_{i<s-i>_n}^{\left[\frac{s-i}{n}\right]+1}\right|.\tag{4}$$

其中$\underline{\boldsymbol{x}}$表示以期望值为参数的确定性加工过程的状态向量.另一方面,我们有参数化表达式

$$x_{m-1}(kn-1)=T(k)=\prod_{s=0}^{kn-1}p_{i(\omega,s)<s-i(\omega,s)>_n}^{\left[\frac{s-i(\omega,s)}{n}\right]+1}(\omega)\leq\prod_{s=0}^{kn-1}\sum_{i\in\mathbf{I}}p_{i<s-i)>_n}^{\left[\frac{s-i}{n}\right]+1}(\omega).\tag{5}$$

式(4)和(5)两边均除以批次k并取极限,结合假设 1 下独立同分布随机变量序列的强大数定理可证得$\lambda\leq\bar{\lambda}_i$,$i=1,2$.定理证明完成.

以$N(t)$表示时刻t之前完成加工的批数,则系统稳态生产率可表为[1]$\lim_{t\to\infty}(1/t)N(t)$.稳态下,机器$M_i$的利用率$\mu_i$,即单位时间当中$M_i$完成有效加工时间所占比例,可表为$\mu_i=\lim_{k\to\infty}T(k)^{-1}\prod_{d=1}^{k}\prod_{j\in\mathbf{J}}p_{ij}^d$.

定理 2. 在定理 1 的条件下

$$\underline{\lambda}^{-1}\geq\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}N(t)\geq(\bar{\lambda})^{-1}.\qquad \text{a.s.}\tag{6}$$

定理 3. 在定理 1 的条件下

$$\underline{\lambda}^{-1}\prod_{j\in\mathbf{J}}Ep_{ij}^1\geq\mu_i\geq(\bar{\lambda})^{-1}\prod_{j\in\mathbf{J}}\mathbf{E}p_{ij}^1.\qquad \text{a.s.}\tag{7}$$

定理 4. 加工周期的估界至少有如下的精度

$$\left|\lambda-\frac{1}{2}(\underline{\lambda}+\bar{\lambda})\right|\leq\frac{1}{2}\prod_{s=0}^{n-1}\mathbf{E}\sum_{\substack{<i+j>_n=s\\ i\in\mathbf{I},j\in\mathbf{J}}}|p_{ij}^1-\mathbf{E}p_{ij}^1|.$$

附注 1. 按照极大代数计算矩阵特征值的方法,容易定出加工周期的下界. 其上界的计算,则可归结为计算 n 个独立随机变量最大值的期望值的问题.

附注 2. 定理 4 表明加工参数分散性较小时,给出的界可以较好地逼近真实的稳态加工周期. 对于分散性为零的情形,也即加工为确定性的,定理 1 中给出的加工周期的上下界相等就是实际的加工周期. 所以,如果能采用可行的控制手段使加工参数保持在标称值下进行生产,则可达到可能的最大生产率(输出率).

3 数值例子

考虑由五台机器刚性连接组成的串行生产线(表 1).

表 1 加工参数的分布

P_{ij}	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
J_0	$U(0.5,1.5)$	$U(1.5,2.5)$	$U(1.5,2.5)$	$U(0.5,1.5)$	$U(0.5,1.5)$
J_1	$U(1.5,2.5)$	$U(0.5,1.5)$	$U(2.5,3.5)$	$U(1.5,2.5)$	$U(0.5,1.5)$
J_2	$U(2.5,3.5)$	$U(0.5,1.5)$	$U(0.5,1.5)$	$U(1.5,2.5)$	$U(1.5,2.5)$

这里 $U(a,b)$ 表示 $[a,b]$ 上的均匀分布. 假定各个工件在各机器上的加工都相互独立.

对 10000 批工件的仿真结果表明加工周期渐近于数值 $\lambda=7.29267$. 计算估计的界可得 $\underline{\lambda}=7.0$, $\bar{\lambda}=\min(\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2)=\min(8.875,8.25)=8.25$,易见 $\lambda\in[\underline{\lambda},\bar{\lambda}]$ 成立. 以上下界平均数 7.625 作为实际稳态周期的估计,其相对误差为 $|7.29267-7.625|/7.29267=0.04558$,在 5% 以内,这就为预见及合理安排生产提供了依据.

参 考 文 献

[1] Baccelli F, Liu Z. Comparison properties of stochastic decision free petri Nets. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1992, **AC-37**: 1905—1920.

[2] Baccelli F. Ergodic Theory of Stochastic Petri Networks. *Annal. Prob.*, 1992, **20**: 375—396.

[3] 宋东平,涂奉生. 随机串行生产线稳态性能分析. 自动化学报,1993, **19**: 753—755.

[4] 贾春福,涂奉生:随机串行生产线稳态性质的研究. 中国控制会议论文集,北京:中国科学技术出版社,1995: 937—941.

[5] 涂奉生,乞敬换. 具有存储器的生产线的状态方程描述及其性能分析. 系统科学与数学,1991,11: 177—186.

PERFORMANCE ESTIMATIONS OF PRODUCTION LINES WITH STOCHASTIC PROCESSING PARAMETERS

ZHAO QIANCHUAN　　ZHENG DAZHONG

(*Department of automation*, *Tsinghua University*, *Beijing* 100084)

Abstract　In this paper, we study the stochastic production lines with n types of different parts in a batch and with processing parameters obeying general distributions. A condition under which the stationary cycle time exists is given. The upper and lower bounds of steady-state cycle time, throughput of production lines and utilization of machines are obtained.

Key words　Production lines, max-algebra.

中国自动化学会第十二届青年学术年会(YAC'97)
征　文　通　知

一、征文范围

(1) 线性与非线性系统控制；(2)自适应控制和预测控制；(3)H_∞控制和鲁棒控制；(4) 智能控制、模糊控制；(5)系统辨识与建模；(6) 故障诊断与容错控制；(7)神经元网络及其应用；(8) 自动化仪表与过程控制；(9) 软件工程、并行处理；(10) 人工智能与专家系统；(11) 图象处理与模式识别；(12)机器人学与机器人控制；(13) 大系统；(14)电力系统及其自动化；(15)电机驱动及运动控制；(16)传感器与检测技术；(17) 离散事件动态系统；(18) 计算机集成制造系统；(19) 系统工程理论、方法及其应用；(20) 企业改革、发展战略与管理决策；(21) 工业工程与生产管理；(22)其它。

二、征文要求

(1) 论文应反映国内外先进水平或有一定的实用价值，未在国内外正式刊物或全国性学术会议上发表过；(2)论文全文一般不超过 5000 字；(3)论文第一作者的年龄不超过 40 岁。(4) 投稿时请注明文章所属的研究方向(见上述征文范围)。

三、论文截稿时间：1997 **年** 3 **月** 1 **日**

1997 年 4 月 15 日前向作者发出论文录用通知；1997 年 5 月 15 日以前要求作者返回正式论文打印稿；1997 年 7 月 1 日以前发出会议通知。

四、投稿地址

杭州市(310014) 浙江工业大学信息工程学院 YAC'97 组委会

联系电话：(0571)8320200，(0571)8058026　联系人：俞立，陈国定