闭环系统辨识的偏差最小二乘法[1)]

张 颖 冯纯伯
(东南大学自动化研究所 南京 210096)

摘 要 研究有色噪声扰动下反馈未知的闭环系统的无偏辨识问题，提出了一种偏差补偿最小二乘法. 应用这种方法，在噪声未建模的情况下，即可获得前向通道中对象模型和反馈通道中控制器模型参数的渐近无偏估计.

关键词 闭环辨识，最小二乘法，一致估计.

1 引言

由于工程的需要，闭环系统参数的估计问题一直受到人们的广泛重视[1]. 目前已提出有几类闭环辨识方法，比如直接辨识法、间接辨识法和联合输出法等. 这些方法的局限在于其辨识结果依赖于噪声模型. 而辅助变量法(IV)虽可在不对噪声建模的情形下实现参数的一致估计，但对于闭环系统而言要找到一个合适的辅助变量是十分困难的[2].

在实际中，闭环系统的前向通道和反馈通道中都会不可避免地受到未知有色噪声的干扰，而且这些噪声的模型又不能精确地知道. 这时辨识的任务是同时获取关于对象和控制器参数的一致估计. 本文就是针对这种情况提出一种间接辨识闭环系统参数的偏差补偿最小二乘法. 通过对最小二乘估计值的渐近分析，可以看到，在外部参考输入、系统输入和输出可测的情况下，系统噪声只会给控制器传递函数中分子的参数估计带来偏差. 因此，可以应用普通最小二乘法获得对象模型参数的无偏估计，然后利用这些估计的构造性约束，从闭环多项式的最小二乘估计中提取出估计偏差并予以消除，得到一致估计. 最后，由闭环多项式的参数估计和对象模型的参数估计，经计算得到控制器模型参数的一致估计.

2 问题描述

考虑图 1 所示的单输入、单输出闭环系统. 图中 $r(k)$，$u(k)$和 $y(k)$分别是外部参考信号、系统的输入和输出，它们均可测量. $v(k)$和 $w(k)$分别代表前向通道和反馈通道中的有色噪声. 对象模型 $G_p(z^{-1})$和控制器模型 $G_c(z^{-1})$分别取为如下结构

$$G_p(z^{-1})=\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}=\frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}, \tag{1}$$

---

1) 国家自然科学重点基金资助课题.
收稿日期 1994-06-23

$$G_c(z^{-1})=\frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})}=\frac{d_0+d_1z^{-1}+\cdots+d_mz^{-m}}{1+c_1z^{-1}+\cdots+c_mz^{-m}}. \tag{2}$$

对系统做如下假设:

1)$r(k)$是平稳随机过程;

2)噪声 $v(k)$和 $w(k)$是具有有理谱密度的平稳序列,且与 $r(k)$统计不相关;

3)闭环多项式 $A(z^{-1})C(z^{-1})+B(z^{-1})D(z^{-1})$稳定,并且 $A(z^{-1})$和 $B(z^{-1})$,$C(z^{-1})$和 $D(z^{-1})$分别是互质的稳定多项式对;

4)系统结构模型参数 n,m 已知,并且满足系统可辨识性条件 $n>m$.

辨识的问题是,如何利用观测数据序列 $\mathbf{Z}^N=\{r(k),y(k),u(k)\}_{k=1}^N$来估计(1)和(2)式中多项式 $A(z^{-1})$,$B(z^{-1})$,$C(z^{-1})$和 $D(z^{-1})$中的系数,并希望得到它们的一致估计.

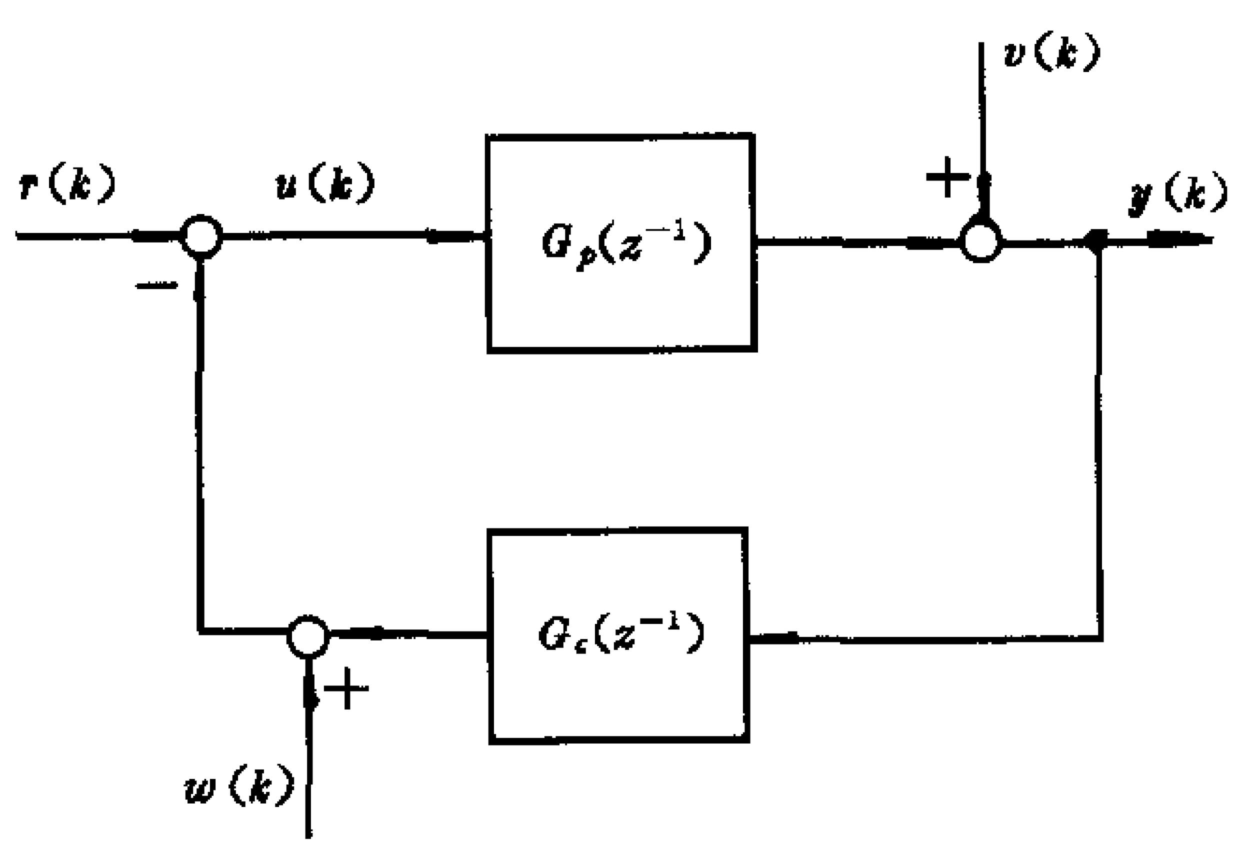

图 1　单输入单输出闭环系统

由图 1 可知,闭环系统输入、输出与外部参考输入 $r(k)$的关系如下:

$$\alpha(z^{-1})u(k)=\beta(z^{-1})r(k)+\xi(k), \tag{3}$$

$$\alpha(z^{-1})y(k)=\gamma(z^{-1})r(k)+\eta(k). \tag{4}$$

其中
$$\alpha(z^{-1})=A(z^{-1})C(z^{-1})+B(z^{-1})D(z^{-1})$$
$$=1+\alpha_1z^{-1}+\cdots+\alpha_{m+n}z^{-(m+n)}; \tag{5}$$

$$\beta(z^{-1})=A(z^{-1})C(z^{-1})$$
$$=1+\beta_1z^{-1}+\cdots+\beta_{m+n}z^{-(m+n)}; \tag{6}$$

$$\gamma z(^{-1})=B(z^{-1})C(z^{-1})$$
$$=\gamma_1z^{-1}+\gamma_2z_{-2}+\cdots+\gamma_{m+n}z^{-(m+n)}; \tag{7}$$

$$\xi(k)=-A(z^{-1})D(z^{-1})v(k)-A(z^{-1})C(z^{-1})w(k); \tag{8}$$

$$\eta(k)=A(z^{-1})C(z^{-1})v(k)-B(z^{-1})C(z^{-1}w(k). \tag{9}$$

由假设 1)—3)和(10),(11)式知,$\xi(k)$和 $\eta(k)$仍为平稳序列,且它们与 $r(k)$统计不相关.

引入以下向量

$$\theta_1^T=[\boldsymbol{\alpha}^T;\boldsymbol{\beta}^T]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m+n};\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{m+n}], \tag{10}$$

$$\theta_2^T=[\boldsymbol{\alpha}^T;\boldsymbol{\gamma}^T]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m+n};\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{m+n}], \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_1^T(k)=[-u(k-1),\cdots,-u(k-m-n);r(k-1),\cdots,r(k-m-n)], \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2^T(k)=[-y(k-1),\cdots,-y(k-m-n);r(k-1),\cdots,r(k-m-n)], \tag{13}$$

则(3)和(4)式可写成如下回归形式

$$u(k)-r(k)=\boldsymbol{\varphi}_1^T(k)\theta_1+\xi(k), \tag{14}$$

$$y(k)=\varphi_2^T(k)\theta_2+\eta(k). \tag{15}$$

应用普通最小二乘法估计 θ_1 和 θ_2

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_1^{LS}(N)&=[\hat{\alpha}^{LS}(N)^T;\hat{\beta}^{LS}(N)^T]^T\\&=\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\varphi_1(k)\varphi_1^T(k)\right)^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\varphi_1(k)(u(k)-r(k))\right),\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_2^{LS}(N)&=[\hat{\alpha}^{LS}(N)^T;\hat{\gamma}^{LS}(N)^T]^T\\&=\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\varphi_2(k)\varphi_2^T(k)\right)^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\varphi_2(k)y(k)\right).\end{aligned} \tag{17}$$

按假设 1)—4)可导出[3]

$$\lim_{N\to\infty}\hat{\theta}_1^{LS}(N)=\theta_1+R_1^{-1}r_{1\xi}, \tag{18}$$

$$\lim_{N\to\infty}\hat{\theta}_2^{LS}(N)=\theta_2+R_2^{-1}r_{2\eta}. \tag{19}$$

其中 $R_1=E[\varphi_1(k)\varphi_1^T(k)]=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\varphi_2(k)\varphi_2^T(k)\right);R_2=E[\varphi_2(k)\varphi_2^T(k)]$;

$r_{1\xi}=E[\varphi_1(k)\xi(k)];r_{2\eta}=E[\varphi_2(k)\eta(k)]$.

由 $\xi(k),\eta(k)$和 $r(k)$不相关可知

$$r_{1\xi}=[-r_{u\xi}(1),\cdots,-r_{u\xi}(m+n),0,\cdots,0]^T\in R^{2(m+n)\times 1}, \tag{20}$$

$$r_{2\eta}=[-r_{y\eta}(1),\cdots,-r_{y\eta}(m+n),0,\cdots,0]^T\in R^{2(m+n)\times 1}. \tag{21}$$

其中 $r_{u\xi}(i)$和 $r_{y\eta}(i)$是信号的相关函数.

因此,由(10),(11),(18)和(19)式可知,应用最小二乘法可直接获得关于 β 和 γ 的无偏估计. 再由(6),(7)式和假设 3),可以通过求公因子的方法从 $\hat{\beta}^{LS}(N)$和 $\hat{\gamma}^{LS}(N)$中推算出多项式 $A(z^{-1}),B(z^{-1})$和 $C(z^{-1})$系数的无偏估计. 至于求二个多项式的公因子或近似公因子的方法很多,譬如常用仿真软件包 MATLAB 中就有现成的算法,此处不再赘述.

同样,由(18)—(21)式可知,在存在噪声时,应用普通最小二乘法只能得到有偏的 α 向量的估计 $\hat{\alpha}^{LS}(N)$. 因此,若要获得关于 $D(z^{-1})$系数的无偏估计,必须设法获得 α 的无偏估计. 下面将讨论这个问题.

3 无偏估计方法

由(19)和(21)式可知,只要估计出相关函数 $r_{y\eta}(i)$,则可按下式获得 θ_2 的无偏估计

$$\hat{\theta}_2^{BELS}(N)=\hat{\theta}_2^{LS}(N)-\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\varphi_2(k)\varphi_2^T(k)\right)^{-1}\hat{r}_{2\eta}(N). \tag{22}$$

其中 $\hat{r}_{2\eta}(N)$是 $r_{2\eta}$的一致估计.

以下讨论获得 $r_{2\eta}$一致估计的方法. 首先给出一个有用的引理,其证明见文[4].

引理 1. 若 $m\times r$ 维矩阵 G 列满秩的,则有 $m\times l$ 维列满秩矩阵 H,使得 $H^TG=0$,其中 $l\leqslant m-r$.

其次,定义如下向量

$$\theta^T=[c_1,c_2,\cdots,c_m;d_0,d_1,\cdots,d_m]. \tag{23}$$

由(5)和(7)式容易推出 θ_2 和 θ 之间的关系如下:

$$\boldsymbol{\theta}_2 = M\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{p}. \tag{24}$$

其中
$$M = \begin{bmatrix} P_c & Q_1 \\ Q_2 & 0 \end{bmatrix} \in R^{2(m+n)\times(2m+1)}; \tag{25}$$

$$P_c = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_1 & 1 & & \\ \vdots & a_1 & \ddots & \\ a_n & \vdots & \ddots & 1 \\ & a_n & & a_1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_n \end{bmatrix} \in R^{(n+m)\times m},\ Q_1 = \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ b_2 & b_1 & & \\ \vdots & b_2 & \ddots & \\ b_n & \vdots & \ddots & b_1 \\ & b_n & & b_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_n \end{bmatrix} \in R^{(n+m)\times(m+1)},\ Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ b_1 & 0 & & \\ \vdots & b_1 & \ddots & \\ b_n & \vdots & \ddots & 0 \\ & b_n & & b_1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_n \end{bmatrix} \in R^{(n+m)\times m}, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{p}^T = [a_1, a_2, \cdots, a_n, \underbrace{0, \cdots, 0}_{m\text{个}}, b_1, b_2, \cdots, b_n, 0, \cdots, 0] \in R^{1\times(2m+2n)}. \tag{27}$$

因此,由引理 1 和假设 4)知,存在一个 $2(m+n)\times(m+n)$ 维的矩阵 H,满足
$$H^T M = 0. \tag{28}$$

于是,将(24)式二边同时左乘 H^T,得
$$H^T\boldsymbol{\theta}_2 = H^T\boldsymbol{p}. \tag{29}$$
以 H^T 左乘(19)式两边并利用(29)式,得
$$H^T \lim_{N\to\infty}\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{LS}(N) = H^T\boldsymbol{p} + H^T R_2^{-1}\boldsymbol{r}_{2\eta}. \tag{30}$$
此式提供了 $(m+n)$ 个线性约束,利用它们可求解出 $\boldsymbol{r}_{2\eta}$ 中的 $(m+n)$ 个未知量 $r_{y\eta}(i)$,(见(21)式中 $\boldsymbol{r}_{2\eta}$ 的表达式).

记
$$r_{y\eta}^T = [-r_{y\eta}(1), \cdots, -r_{y\eta}(m+n)], \tag{31}$$
$$K^T = [I_{n+m}; \boldsymbol{O}] \in R^{(m+n)\times(2m+2n)}, \tag{32}$$
则有
$$\boldsymbol{r}_{2\eta} = K r_{y\eta} = K(H^T R_2^{-1} K)^{-1} H^T (\lim_{N\to\infty}\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{LS}(N) - \boldsymbol{p}). \tag{33}$$

由以上分析知,应用普通最小二乘法可获得 $a_i, b_i (i=1,2,\cdots,n)$ 的一致估计,将这些估计值代入到矩阵 M 和向量 $\boldsymbol{p}$ 中,可得到 $\boldsymbol{r}_{2\eta}$ 的估计
$$\boldsymbol{r}_{2\eta}(N) = K(\hat{H}^T \hat{R}_2^{-1} K)^{-1} \hat{H}^T (\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{LS}(N) - \boldsymbol{p}). \tag{34}$$
其中
$$\hat{R}_2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_2(k)\boldsymbol{\varphi}_2^T(k), \quad \hat{H}^T\hat{M} = 0, \tag{35),(36}$$
且 $\hat{M}$ 和 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 以 a_i, b_i 的最小二乘估计 $\hat{a}_i^{LS}(N), \hat{b}_i^{LS}(N)$ 代入(25)—(27)式中矩阵 M 和向量 $\boldsymbol{p}$ 的结果.

按(22)式,可得 $\boldsymbol{\theta}_2$ 的估计为
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{BELS}(N) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{LS}(N) - \hat{R}_2^{-1} K(\hat{H}^T \hat{R}_2^{-1} K)^{-1} \hat{H}^T (\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{LS}(N) - \hat{\boldsymbol{p}}). \tag{37}$$
下节将证明 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{BELS}(N)$ 是 $\boldsymbol{\theta}_2$ 的一致估计.

有了 $\boldsymbol{\theta}_2, a_i, b_i, c_j$ 的一致估计,利用(5)式可推算出关于多项式 $D(z^{-1})$ 中系数 $d_j(j=1,\cdots,m)$ 的一致估计.

4 一致性分析

由以上分析知，为了分析用本文方法得到的参数估计的一致性，只要证明 $\hat{\theta}_2^{BELS}(N)$是 θ_2 的一致估计即可. 为此，建立以下定理.

定理 1. 当采样数据长度 N 趋于无穷时，由(37)，(35)和(36)式获得的估计 $\hat{\theta}_2^{BELS}(N)$ 按概率等于 1 趋于其真值 θ_2，即

$$\lim_{N\to\infty}\hat{\theta}_2^{BELS}(N)=\theta_2,\quad w.p.1. \tag{38}$$

证明. 由第二节分析知，利用普通最小二乘法获得的参数 $a_i,b_i(i=1,2,\cdots,n)$的估计 $\hat{a}_i^{LS}(N)$，$\hat{b}_i^{LS}(N)$是一致的，即

$$\lim_{N\to\infty}\hat{a}_i^{LS}(N)=a_i,\quad \lim_{N\to\infty}\hat{b}_i^{LS}(N)=b_i,\quad w.p.1.$$

因此，(36)式中的 $\hat{M}$ 也是 M 的一致估计，即$\lim\limits_{N\to\infty}\hat{M}=M$. 同样，(37)式中的 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 也是 $\boldsymbol{p}$ 的一致估计，即$\lim\limits_{N\to\infty}\hat{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}$. 所以，按照矩阵 $\hat{H}$ 的选法，当 $N\to\infty$时，这时的 $\hat{H}$ 记为 $\hat{H}_\infty$，应满足 $\hat{H}_\infty^TM=0$.

参照(28)—(30)式有

$$\hat{H}_\infty^T(\lim_{N\to\infty}\boldsymbol{\theta}_2^{LS}(N)-\boldsymbol{p})=\hat{H}_\infty^TR_2^{-1}\boldsymbol{r}_{2\eta}=\hat{H}_\infty^TR_2^{-1}K\boldsymbol{r}_{2\eta}. \tag{39}$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\hat{\boldsymbol{r}}_{2\eta}(N)&=K(\hat{H}_\infty^TR_2^{-1}K)^{-1}\hat{H}_\infty^T(\lim_{N\to\infty}\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{LS}(N)-\boldsymbol{p})\\&=K(\hat{H}_\infty^TR_2^{-1}K)^{-1}\hat{H}_\infty^TR_2^{-1}K\boldsymbol{r}_{2\eta}\\&=Kr_{2\eta}\overset{(33)}{=\!=\!=}\boldsymbol{r}_{2\eta},\quad w.p.1.\end{aligned} \tag{40}$$

综合(37)，(34)，(22)，(19)和(40)各式，则有

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{BELS}(N)&=\lim_{N\to\infty}\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{LS}(N)-\lim_{N\to\infty}\hat{R}_2^{-1}\hat{\boldsymbol{r}}_{2\eta}(N)\\&=(\boldsymbol{\theta}_2+R_2^{-1}\boldsymbol{r}_{2\eta}-\lim_{N\to\infty}\hat{R}_2^{-1}\hat{\boldsymbol{r}}_{2\eta}(N)\\&=\boldsymbol{\theta}_2,\qquad w.p.1.\end{aligned}$$

证毕.

由 θ_2,a_i,b_i 和 c_j 参数估计的一致性知，按(5)式推算出的 d_j 的估计也是一致的.

5 仿真例子

考虑图 1 所示的闭环系统，其中

$$G_p(z^{-1})=\frac{0.173z^{-1}+0.102z^{-2}}{1.0-1.425z^{-1}+0.496z^{-2}},G_c(z^{-1})=\frac{3.485-5.422z^{-1}+2.15z^{-2}}{1.0-1.5z^{-1}+0.6z^{-2}},$$

并且有色噪声 $v(k)$和 $w(k)$分别由以下二个 MA 过程模拟，即 $v(k)=e(k)+0.5e(k-1)$，$w(k)=e(k)+0.7e(k-1)+0.8e(k-2)$. 其中 $e(k)$是零均值单位方差白色噪声.

将外部参数输入 $r(k)$取为零均值单位方差的随机信号，应用本文方法做了 10 次实验. 表 1 给出了观测数据长度分别为 $N=200$，$N=500$ 和 $N=1000$ 时参数估计值的均值和方差. 表中数据表明，该方法可在有色噪声下获得高精度的闭环系统参数的估计.

表 1　仿真结果

N	ture value	200	500	1000
a_1	−1.425	−1.475±0.089	−1.398±0.063	−1.393±0.041
a_2	0.496	0.483±0.078	0.514±0.055	0.511±0.052
b_1	0.173	0.160±0.074	0.169±0.067	0.617±0.039
b_2	0.102	0.098±0.093	0.105±0.057	0.107±0.043
c_1	−1.5	−1.526±0.097	−1.519±0.078	−1.515±0.054
c_2	0.6	0.587±0.078	0.583±0.063	0.578±0.035
d_0	3.485	3.423±0.083	3.432±0.057	3.437±0.048
d_1	−5.422	−5.518±0.089	−5.514±0.071	−5.515±0.064
d_2	2.15	2.108±0.077	2.054±0.060	2.076±0.043

6　结论

应用文中提出的间接辨识闭环系统的偏差补偿最小二乘法，在系统外部参数信号可测的情形下，可以获得对象模型和控制器模型参数的无偏估计，而无需对前向通道和反向通道中受到的有色干扰进行建模.

参　考　文　献

[1] Gustavsson I, Ljung L., Soderstrom T. Identification of Processes in closed-loop: Identifiablity and accuracy aspects. *Automatica*, 1977, **13**(1): 59—76.

[2] Soderstrom T, Stoica P G. Instrumental methods for system indentification. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[3] Davis M H A, Vinter R B. Stochastic modelling and control. London: Chapman and Hall, 1985.

[4] 韩京清，何关钰，许可康. 线性系统理论的代数基础，沈阳：辽宁科学技术出版社，1986.

BIAS-COMPENSATED LEAST-SQUARES METHOD FOR IDENTIFICATION OF CLOSED-LOOP SYSTEMS

ZHANG YING　FENG CHUNBO

(*Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing*　210096)

Abstract　This paper studies the problem of indentifying closed-loop systems in the presence of colored noises. A bias-compensated least-squares method is developed, which is able to estimate consistently the transfer function of the plant and controller in the closed-loop system, even if the models of the noises are not known

Key words　Consistent estimation, least-squares method, closed-loop identification.

张　颖　1967 年生. 1989 年毕业于东南大学自动控制系，1995 年在该校自动化研究所获博士学位. 主要研究领域为系统辨识、信号处理及适应控制等.

冯纯伯　简介见本刊 1994 年第 1 期.