



# 评“热防护发汗冷却控制”一文<sup>1)</sup>

周美珂

(北京师范大学数学系 北京 100875)

**关键词** 数学模型, 发汗冷却控制, 热防护.

设有厚度为  $l$  的多孔介质层, 其伸展方向垂直于  $y$  轴, 初始时刻  $t=0$  在  $y$  轴上占据区间  $[0, l]$ . 设在  $y=0$  一侧, 多孔介质层受到气动加热, 并因此可能被烧蚀. 以  $s(t)$  表示时刻  $t$  的烧蚀厚度. 设在  $y=l$  一端向多孔介质层注入发汗剂. 发汗剂经多孔介质层从烧蚀面流出, 带走热量, 达到控制烧蚀的目的. 记时刻  $t$  在坐标  $y$  处的温度为  $T(y, t)$ , 文献 [1] 在局域平衡假定下, 即假定多孔介质发汗剂的温度与当地多孔介质的温度相同, 建立了方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial T}{\partial y} + \dot{s}(t) \frac{l-y}{l-s(t)} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \forall y \in (s(t), l), \quad (1)$$

其中  $\alpha = k/(\rho C_p)$ ,  $\beta = \dot{m}_L C_{pL}/(\rho C_p)$ . 这里  $k, \rho, C_p$  分别是多孔介质的热传导系数、密度、比热;  $\dot{m}_L, C_{pL}$  分别是发汗剂的质量损耗率和比热. 文献 [1] 及其后继研究都把方程 (1) 右端出现的第三项作为理论上创新的标志, 称之为“动边界引起的热项”. 本文将证明这一项的出现与能量守恒定律矛盾, 它是由文献 [1] 在推导中的错误造成的.

为了简单, 只考虑不注入发汗剂且多孔介质层在  $y=l$  一端绝热的情形. 其它情形可完全类似地进行讨论. 这时, 有  $\beta=0$ , 且

$$\frac{\partial T(l, t)}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

记  $T_m$  是烧蚀温度, 有

$$T(y, t) \leq T_m, \quad (T_m - T(y, t))\dot{s}(t) = 0, \quad \dot{s}(t) \geq 0. \quad (3)$$

时刻  $t$  多孔介质因温升在单位时间内所需的热量为  $\int_{s(t)}^l \rho C_p \partial T / \partial t \, dy$ , 烧蚀潜热为  $\rho L \dot{s}(t)$ . 这里  $L$  是多孔介质汽化潜热率. 根据能量守恒定律, 这两部分热量之和应等于烧蚀端  $y=s(t)$  处的气动加热  $Q(t)$ , 由于  $Q(t) = \rho L \dot{s}(t) - k \partial T(y, t) / \partial y$ , 所以

$$\int_{s(t)}^l \rho C_p \frac{\partial T(\xi, t)}{\partial t} d\xi + \rho L \dot{s}(t) = \rho L \dot{s}(t) - k \frac{\partial T(s(t), t)}{\partial y}. \quad (4)$$

利用 (2) 式以及方程 (1), 由 (4) 式可以推出

$$\rho C_p \frac{\dot{s}(t)}{l-s(t)} \int_{s(t)}^l (l-y) \frac{\partial T(y, t)}{\partial y} dy = 0. \quad (5)$$

1) 国家自然科学基金资助项目.

收稿日期: 1995-08-25

当  $\dot{s}(t) > 0$  时, 由(3), (5)式得  $T(y, t) = T_m$ , 从而有  $\partial T(y, t) / \partial y = 0$ . 因此, 只要承认能量守恒定律, 方程(1)右端的第三项就不会出现.

所谓“动边界引起的热项”, 根据它的表达式, 是这样一种分布热源密度, 即多孔介质层的任何地点  $y$ , 不管它与烧蚀面的距离如何, 也不管它与烧蚀面之间介质的状态如何, 该分布热源密度在此处的值都正比于烧蚀面运动速度  $\dot{s}(t)$  和局部量  $\partial T / \partial y$  的乘积. 这种神秘的机制曾经引起一些学者的怀疑. 但是, 由于文献[1]中推导数学模型的方法很繁, 其错误不易发现, 这个模型最终还是被接受了. 因此, 有必要对文献[1]的推理过程做一个细致的检查, 彻底弄清其错误到底是怎样产生的.

文献[1]将多孔介质层在时刻  $t$  所占据的区间  $[s(t), l]$  分成  $NP - 1$  等份, 记  $\Delta y = [l - s(t)] / (NP - 1)$ ,  $y_i = l - [l - s(t)](NP - i - 1) / (NP - 1)$ ,  $\dot{S}_i = dy_i / dt = \dot{s}(t)(l - y_i) / [l - s(t)]$ . 对动区间  $[y_i, y_{i+1}]$  应用能量守恒定律, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta y \rho_i C_{Pi} T_i) &= K_{i+1} \left( \frac{\Delta T}{\Delta y} \right)_{i+1} - K_i \left( \frac{\Delta T}{\Delta y} \right)_i \\ &+ \dot{m}_{Li+1} C_{PLi+1} T_{i+1} - \dot{m}_{Li} C_{PLi} T_i \\ &+ \rho_{i+1} C_{Pi+1} T_{i+1} \dot{S}_{i+1} - \rho_i C_{Pi} T_i \dot{S}_i, \end{aligned} \quad (6)$$

即文献[1]中的方程(1). 在文献[1]中, 导数符号  $\frac{\partial}{\partial t}$  下的  $\Delta y \rho_i C_{Pi} T_i$  是想用来表示动区间  $[y_i, y_{i+1}]$  中所含热容的, 并把(6)式左端化成

$$\Delta y \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i C_{Pi} T_i) - \Delta y \rho_i C_{Pi} T_i \dot{s}(t) / [l - s(t)], \quad (7)$$

即文献[1]中方程(2)的左端.

但是, 动区间  $[y_i, y_{i+1}]$  中多孔介质所含热容是  $\int_{y_i}^{y_{i+1}} \rho C_P T(y, t) dy$ , 而不是  $\Delta y \rho_i C_{Pi} T_i$ . 或许文献[1]的作者认为, 前者与后者只差比  $\Delta y$  高阶的小量, 将它们相互代替是容许的. 实际上, 由于计算的这个量是在导数符号  $\frac{\partial}{\partial t}$  之下的, 这种替代一般是不对的.

注意  $y_i, y_{i+1}$  都是  $t$  的函数, 不难得到

$$\frac{d}{dt} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \rho C_P T(\xi, t) d\xi = \Delta y \left( \frac{\partial \rho C_P T}{\partial t} \right)_i^* + \Delta y \left( \frac{\partial \rho C_P (l - y) T}{\partial y} \right)_i^* \dot{s}(t) / [l - s(t)]. \quad (8)$$

记号  $( )_i^*$  用来表示括号中的量在区间  $[y_i, y_{i+1}]$  上的某一适当中值.

类似地, 动区间  $[y_i, y_{i+1}]$  中发汗剂所含的热容为  $\int_{y_i}^{y_{i+1}} \rho_L C_{PL} T(\xi, t) d\xi$ . 将它对  $t$  求导, 可得

$$\frac{d}{dt} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \rho_L C_{PL} T(\xi, t) d\xi = \Delta y \left( \frac{\partial \rho_L C_{PL} T}{\partial t} \right)_i^* + \Delta y \left( \frac{\partial \rho_L C_{PL} (l - y) T}{\partial y} \right)_i^* \frac{\dot{s}(t)}{[l - s(t)]}. \quad (9)$$

因此, 方程(6)的左端应化成

$$\Delta y \left( \frac{\partial (\rho C_P + \rho_L C_{PL}) T}{\partial t} \right)_i^* + \Delta y \left( \frac{\partial (\rho C_P + \rho_L C_{PL}) (l - y) T}{\partial y} \right)_i^* \cdot \frac{\dot{s}(t)}{l - s(t)}, \quad (10)$$

而不是(7)式. 如果发汗量很小,  $\rho_L C_{PL}$  可以忽略.

文献[1]在计算方程(6)右端的第三、四两项时, 错误地用发汗剂相对于多孔介质的速度  $\dot{m}_L / \rho_L$  代替了它相对于动区间  $[y_i, y_{i+1}]$  两 endpoint  $y_i, y_{i+1}$  的速度  $\dot{S}_i + \dot{m}_{Li} / \rho_{Li}, \dot{S}_{i+1} + \dot{m}_{Li+1} /$



$\rho_{Li+1}$ . 流动的发汗剂对动区间 $[y_i, y_{i+1}]$ 所含热容在时刻  $t$  增长速度的贡献本应是

$$\left( \frac{\partial m_L C_{PL} T}{\partial y} \right)_i \Delta y + \left( \frac{\partial \rho_L C_{PL} (l - y) T}{\partial y} \right)_i \cdot \frac{\dot{s}(t)}{l - s(t)} \cdot \Delta y,$$

而在文献[1]中缺少了这里的第二项.

综上,在改正了文献[1]的上述错误之后,得到的方程应是

$$\frac{\partial(\rho C_P + \rho_L C_{PL})T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ k \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial m_L C_{PL} T}{\partial y}, \quad s(t) < y < l. \quad (11)$$

当发汗量很少时,简化形式应是

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial T}{\partial y}, \quad s(t) < y < l, \quad (12)$$

而不是方程(1).

### 参 考 文 献

- [1] 杨学实. 热防护发汗冷却控制. 自动化学报, 1985, 11(4): 345-350.

## A COMMENT ON THE PAPER“TRANSPIRATION OF COOLING CONTROL OF THERMAL PROTECTION”

ZHOU MEIKE

(Dept. of Math, Beijing Normal Univ., Beijing 100875)

**Key words** Mathematical model, transpiration cooling control, thermal protection.

## 中国自动化学会将召开第七次全国会员代表大会 并举办《中国天津国际自动化技术设备展览会》

中国自动化学会将于1997年2月—8月以通讯方式召开第七次全国会员代表大会,选举新一届理事会成员,通过第六届理事会工作报告,修改会章,通过授予中国自动化学会荣誉理事名单等事宜. 1997年10月将在天津召开七届一次理事会,选举七届理事会正、副理事长、秘书长及常务理事,同时举办全国学术年会.

1997年10月7日—10日,中国自动化学会与天津市经济委员会,联合举办《中国天津国际自动化技术设备展览会》,展览内容包括:工业过程控制系统及装备;工业控制机、可编程控制器、分布式控制及智能控制等控制装置;自动化仪器仪表、传感器、执行机构;数控数显设备、变频调速器、电气传动装置;办公自动化、交通自动化、智能大厦及计算机集成制造系统;声音、图象、图形处理及计算机可视化等多媒体技术设备;管理信息系统、机电一体化、高新技术改造传统产业的技术装备等. 它将集技术展示、产品订货、技术交流、学术研讨于一体,是全国自动化科技工作者、企业家、生产厂家相聚一堂的良机,也是科技为经济服务的一个举措.

(中国自动化学会办公室)