



基于 Hankel 范数模型降价的控制对象的名义模型选择¹⁾

周 彤

(北京航空航天大学第七研究室 北京 100083)

摘 要 研究了控制对象具有多个模型时,求取其适合鲁棒控制器设计的名义模型的问题.提出了一种基于 Hankel 范数模型降价的名义模型选择算法.仿真结果确认了算法的有效性.

关键词 鲁棒控制,建模,模型误差, Hankel 范数.

1 问题的提出

Hankel 范数模型降价是模型降价的一种有效方法.借助于 Parrott 外推定理,这一问题得到了完满的解决^[1].本文探讨一个新的关于控制对象的名义模型的选择问题,并建立一种基于 Hankel 范数模型降价的算法.仿真算例证明了算法的有效性.

符号: $G^{\sim}(s) = G^T(-s)$; πH^{∞} : 本身及逆皆在 $\text{Re}[s] \geq 0$ 解析的传递函数阵的集合.

对于给定的 n 个 $m \times p$ 维稳定的传递函数阵 $G_1(s), \dots, G_n(s)$, 及属于 πH^{∞} 的传递函数 $w_1(s), \dots, w_n(s)$, 求一具有最小阶数的 $m \times p$ 维传递函数阵 $G_0(s)$, 使得目标函数

$$J = \left\| \begin{array}{c} w_1(s)[G_1(s) - G_0(s)] \\ \dots \\ w_n(s)[G_n(s) - G_0(s)] \end{array} \right\|_{\infty}$$

小于给定的正数 γ .

1) 在控制系统设计中,一个经常遇到的问题控制对象的输入输出特性会随着时间的推移、环境的变化、工作点的移动等而产生变化.因此,在设计控制器时,选择控制对象的名义模型便成为不可回避的问题.如果有一个 $m \times p$ 维传递函数阵 $G_0(s)$, 使得 $J < \gamma$; 而 $G_i(s), i=1, \dots, n$ 代表了控制对象在不同状态下的输入输出特性.那么,控制对象的所有状态下的传递函数阵均属于集合 $G = \{G(s) | G(s) = G_0(s) + r(s)\Delta(s), \|\Delta(s)\|_{\infty} < 1, \Delta(s) \text{ stable}\}$. 这里, $r(s)$ 为任意满足 $r(j\omega) \leq \gamma / (\min_{1 \leq i \leq n} |w_i(j\omega)|)$, $\omega \in (-\infty, +\infty)$, 且属于 πH^{∞} 的传递函数.

1) 国家自然科学基金资助项目.

收稿日期:1994-11-09

2) 选择 L_∞ 范数来衡量名义模型之误差是为了使集合 G 适合已有的鲁棒控制器设计理论.

3) 权函数 $w_i(s)$ 反映对名义模型误差在控制对象的不同工作状态的不同频率的要求.

4) 通过固定传递函数阵 $G_0(s)$ 的阶数及逐步减小 γ , 判断 $G_0(s)$ 的存在性, 可以得到目标函数 J 所能达到的最小值.

2 问题的求解

引理1. 对于 $n \times n$ 维传递函数阵 $G(s)$, 如果 $G^-(s) = G(s)$, $G(s) \in L^\infty$, $G^{-1}(s) \in L^\infty$, 且 $G(\infty) > 0$, 那么, 满足 $G(s) = G^-(s)G_-(s)$ 且属于 πH^∞ 的传递函数阵 $G_-(s)$ 存在.

引理2. 如果 $n_1 \times n_2$ ($n_1 > n_2$) 维传递函数阵 $G(s)$ 稳定, 且 $G^-(s)G(s) = I_{n_2}$, 则存在稳定的传递函数阵 $G_1(s)$, 使得 $[G(s)G_1(s)]^- [G(s)G_1(s)] = [G(s)G_1(s)][G(s)G_1(s)]^- = I_{n_1}$.

证明. 设 $G(s)$ 的最小实现为 $C(sI - A)^{-1}B + D$. 根据 $G(s)$ 稳定, 且 $G^-(s)G(s) = I_{n_2}$, 得到^[3]满足

$$PA + A^T P = -C^T C, \quad -PB = C^T D \quad (1)$$

的正定矩阵 P 存在, 且

$$I_{n_2} - D^T D = 0. \quad (2)$$

从方程(2)知, 矩阵 D 是列满秩的. 因此, 存在 $n_1 \times (n_1 - n_2)$ 维矩阵 D_1 , 使得

$$[D \ D_1]^T [D \ D_1] = [D \ D_1][D \ D_1]^T = I_{n_1}. \quad (3)$$

令

$$B_1 = -P^{-1}C^T D_1, \quad G_1(s) = C(sI - A)^{-1}B_1 + D_1. \quad (4)$$

从传递函数阵的运算可知, $G_1(s)$ 满足引理要求, 引理得证.

引理3^[2]. 设传递函数阵 $G(s)$, $F(s)$ 属于 L^∞ 且具有相同列数. 则 $\|[F^T(s)G^T(s)]^T\|_\infty < \gamma$ 的充要条件为 $\|G(s)\|_\infty < \gamma$, $\|F(s)\bar{G}^{-1}(s)\|_\infty < 1$. 这里, $\bar{G}(s)$ 满足 $\bar{G}(s) \in \pi H^\infty$, $\bar{G}^-(s)\bar{G}(s) = \gamma^2 I - G^-(s)G(s)$.

下面, 讨论控制对象名义模型选择问题的求解. 令

$$T_1(s) = \begin{bmatrix} w_1(s)G_1(s) \\ \dots \\ w_n(s)G_n(s) \end{bmatrix}, \quad T_2(s) = \begin{bmatrix} w_1(s)I_m \\ \dots \\ w_n(s)I_m \end{bmatrix}.$$

显然, $J = \|T_1(s) - T_2(s)G_0(s)\|_\infty$. 从 $n \geq 1$ 且 $w_i(s) \in \pi H^\infty$ ($i = 1, \dots, n$) 知, 对于任意的 $\text{Re}[s] \geq 0$, $T_2(s)$ 是列满秩的. 因此

$$T_2^-(s)T_2(s) \in L^\infty, \quad (T_2^-(s)T_2(s))^{-1} \in L^\infty. \quad (5)$$

从引理1知, 满足 $T_{20}^-(s)T_{20}(s) = T_2^-(s)T_2(s)$ 的属于 πH^∞ 的 $m \times m$ 维传递函数阵 $T_{20}(s)$ 存在, 且从其定义可以得到, $T_{20}(s)$ 具有 $T_{20}(s) = w(s)I_m$, $w(s) \in \pi H^\infty$ 的结构. 令 $T_{2i}(s) = T_2(s)T_{20}^{-1}(s)$, 那么 $T_{2i}(s) \in H^\infty$ 且 $T_{2i}^-(s)T_{2i}(s) = I_m$.

由引理2知, 满足关系

$$[T_{2i}(s) \quad T_{2\perp}(s)][T_{2i}(s) \quad T_{2\perp}(s)]^\sim = [T_{2i}(s) \quad T_{2\perp}(s)]^\sim [T_{2i}(s) \quad T_{2\perp}(s)] = I_{nm} \quad (6)$$

的稳定的传递函数阵 $T_{2\perp}(s)$ 存在.

根据内函数阵的保范性等性质,可得

$$\begin{aligned} J &= \left\| [T_{2i}(s)T_{2\perp}(s)]^\sim \left\{ T_1(s) - [T_{2i}(s)T_{2\perp}(s)] \begin{bmatrix} T_{20}(s) \\ 0 \end{bmatrix} G_0(s) \right\} \right\|_\infty \\ &= \left\| \begin{bmatrix} [T_{20}^{-1}(s)T_{2i}(s)T_1(s) - G_0(s)]T_{20}(s) \\ T_{2\perp}(s)T_1(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty. \end{aligned} \quad (7)$$

由引理3和方程式(7)得到下面的定理.

定理1. 目标函数 J 小于 γ 的充要条件为

$$\|T_{2\perp}(s)T_1(s)\| < \gamma, \quad \|[T_{20}^{-1}(s)T_{2i}(s)T_1(s) - G_0(s)]T_{20}^{-1}(s)T_{20}(s)\|_\infty < 1.$$

这里, $T_0(s)$ 属于 πH^∞ 且满足 $T_0^\sim(s)T_0(s) = \gamma^2 I - (T_{2\perp}(s)T_1(s))^\sim (T_{2\perp}(s)T_1(s))$.

由 $T_{2i}(s) = T_2(s)T_{20}^{-1}(s)$ 可以得到

$$T_{20}^{-1}(s)T_{2i}(s)T_1(s) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{w_i^\sim(s)w_i(s)}{\sum_{j=1}^n w_j^\sim(s)w_j(s)} G_i(s) \right]. \quad (8)$$

由于 $T_{2\perp}(s), T_1(s)$ 均与 $G_0(s)$ 无关,因此, $T_0(s)$ 也与 $G_0(s)$ 无关. 从定理1可知,求满足 $J < \gamma$ 的最小阶数的稳定的传递函数阵 $G_0(s)$ 的问题等价于一个 L^∞ 范数下的模型降阶问题.

现在,讨论 $w_1(s) = \dots = w_n(s) = \rho(s), \rho(s) \in \pi H^\infty$ 的特殊情形. 此时,

$$T_1(s) = \rho(s)[G_1^\top(s) \dots G_n^\top(s)]^\top, \quad T_2(s) = \rho(s)[I_m \dots I_m]^\top.$$

因此

$$T_2^\sim(s)T_2(s) = n\rho^\sim(s)\rho(s)I_m. \quad (9)$$

令 $T_{20}(s) = \sqrt{n}\rho(s)I_m$. 显然, $T_{20}(s) \in \pi H^\infty$ 且 $T_{20}^\sim(s)T_{20}(s) = T_2^\sim(s)T_2(s)$. 于是

$$T_{2i}(s) = T_2(s)T_{20}^{-1}(s) = \frac{1}{\sqrt{n}}[I_m \dots I_m]^\top = T_{2i}. \quad (10)$$

因此,存在 $mn \times m(n-1)$ 维常数矩阵 $T_{2\perp}$,使得

$$[T_{2i} \quad T_{2\perp}][T_{2i} \quad T_{2\perp}]^\top = [T_{2i} \quad T_{2\perp}]^\top [T_{2i} \quad T_{2\perp}] = I_{nm}, \quad (11)$$

且

$$[T_{20}^{-1}(s)T_{2i}(s)T_1(s) - G_0(s)]T_{20}^{-1}(s)T_{20}(s) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G_i(s) - G_0(s) \right] T_{20}^{-1}(s)\rho(s)\sqrt{n}. \quad (12)$$

这里, $T_0(s)$ 为满足 $T_0^\sim(s)T_0(s) = \gamma^2 I - (T_{2\perp}^\top T(s))^\sim (T_{2\perp}^\top T(s))$ 的属于 πH^∞ 的传递函数阵.

由以上讨论可知, $w_1(s) = \dots = w_n(s) = \rho(s)$ 时,控制对象的名义模型选择问题可转化为求一个最低阶的稳定的传递函数阵 $G_0(s)$,使得

$$\left\| \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G_i(s) - G_0(s) \right] T_{20}^{-1}(s)\rho(s) \right\|_\infty < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

3 选择名义模型的算法

从上节的分析知,控制对象的名义模型选择问题等价于一个 L^∞ 范数下的模型降阶问题. 直接求解这个问题在数学上有一定的困难. 为了解决这个问题,现已提出许多方法. 如平衡截去法、Hankel 范数模型降阶法^[1]等. 较之于平衡截去法,Hankel 范数模型降阶法具有得到的名义模型的误差上限较小等优点.

根据 Hankel 范数模型降阶法,提出下面的选择控制对象的名义模型的算法.

1) 取 $G_0(s)$ 的阶数 k , 对 $T_{20}^{-1}(s)T_{2i}^{\sim}(s)T_1(s)$ 进行 Hankel 范数下的模型降阶, 得到传递函数阵 $G_0(s)$;

2) 计算 $\| [T_{20}^{-1}(s)T_{2i}^{\sim}(s)T_1(s) - G_0(s)] T_0^{-1}(s)T_{20}(s) \|_\infty$;

3) 如果 $\| [T_{20}^{-1}(s)T_{2i}^{\sim}(s)T_1(s) - G_0(s)] T_0^{-1}(s)T_{20}(s) \|_\infty < 1$, $G_0(s)$ 即为要求的控制对象的名义模型; 否则, 增加 $G_0(s)$ 的阶数, 重复 1), 2) 的工作, 直到得到满意的结果.

4 仿真算例

研究一种内燃机的燃料油喷射泵的名义模型选择问题^[4]. 这种喷射泵的输入输出特性主要根据温度的变化而变化. 以下为该喷射泵在 0°C , 25°C , 60°C 时的传递函数.

$$P_0(s) = (-1.736 \times 10^{-2}s^2 + 4.939 \times 10^2s - 3.137 \times 10^5) / (s^3 + 98.34s^2 + 9.223 \times 10^3s + 8.771 \times 10^4),$$

$$P_{25}(s) = (5.498s^2 + 4.007 \times 10^2s - 4.444 \times 10^5) / (s^3 + 93.72s^2 + 9.520 \times 10^3s + 1.214 \times 10^5),$$

$$P_{60}(s) = (4.667s^2 - 2.859 \times 10^2s - 5.053 \times 10^5) / (s^3 + 91.53s^2 + 1.008 \times 10^4s + 1.762 \times 10^5).$$

图1给出了这些传递函数的频率特性

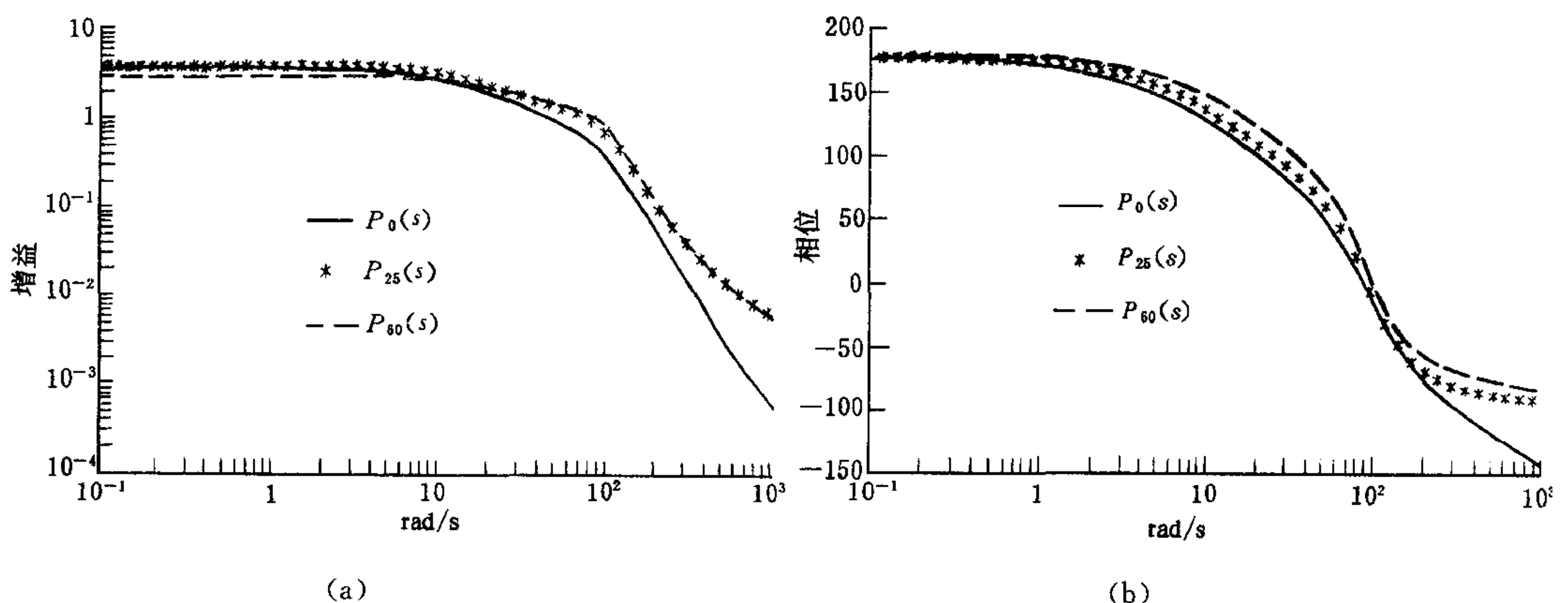


图1 控制对象的频率特性

对于控制对象名义模型的选择,有以下三种直观方法:1) 取 $P_{25}(s)$ 为控制对象的名义模型;2) 取 $P_0(s), P_{25}(s), P_{60}(s)$ 的参数平均值为控制对象名义模型的参数;3) 取 $P_0(s), P_{25}(s), P_{60}(s)$ 的参数最大值与最小值的平均值为控制对象名义模型的参数. 据此,得到控制对象的三个名义模型如下:

$$P_{\text{nom}}^1(s) = (5.498s^2 + 4.007 \times 10^2 s - 4.444 \times 10^5) / (s^3 + 93.72s^2 + 9.520 \times 10^3 s + 1.214 \times 10^5),$$

$$P_{\text{nom}}^2(s) = (3.386s^2 + 2.029 \times 10^2 s - 4.211 \times 10^5) / (s^3 + 94.53s^2 + 9.608 \times 10^3 s + 1.284 \times 10^5),$$

$$P_{\text{nom}}^3(s) = (2.740s^2 + 1.040 \times 10^2 s - 4.095 \times 10^5) / (s^3 + 94.94s^2 + 9.652 \times 10^3 s + 1.320 \times 10^5).$$

取 $\gamma=1$ 和权函数 $w_1(s) = w_2(s) = w_3(s) = 476.7(s+3)(s+76.9)(s+142.9) / [(s+2.5)(s^2 + 2.1 \times 10^3 s + 4.0 \times 10^6)]$. 利用本文的算法,得到控制对象的三阶名义模型为

$$P_{\text{nom}}^4(s) = (4.279s^2 - 3.638 \times 10^2 s - 3.561 \times 10^5) / (s^3 + 83.56s^2 + 8.710 \times 10^3 s + 1.067 \times 10^5).$$

图2给出了这些名义模型的误差幅度的频率特性,即 $\max_{l=0,25,60} \{ |P_{\text{nom}}^i(j\omega) - P_l(j\omega)| \}, i=1,2,3,4, 0 \leq \omega < \infty$.

从图2可知,在阶数不变的情况下,通过本文的方法得到的控制对象的名义模型在中频段(4 rad/s—40 rad/s)的误差比由直观得到的所有的名义模型的误差要小20%以上,而中频段是鲁棒控制器设计时最为重要的频段.

5 结语

本文探讨了一个在控制工程中经常遇到的控制对象的名义模型选择问题. 首先,

证明了这一问题可转化为 L^∞ 范数下的模型降阶问题. 然后,根据 Hankel 范数下的模型降阶,提出了一种选择控制对象的名义模型的算法. 仿真结果表明,根据这种方法得到的控制对象的名义模型在阶数不变的情况下,其误差比通常依靠直观得到的名义模型的误差要小,而且名义模型的误差幅度的频率特性可以通过权函数的选择来加以控制. 这些对于鲁棒控制器的设计十分有益.

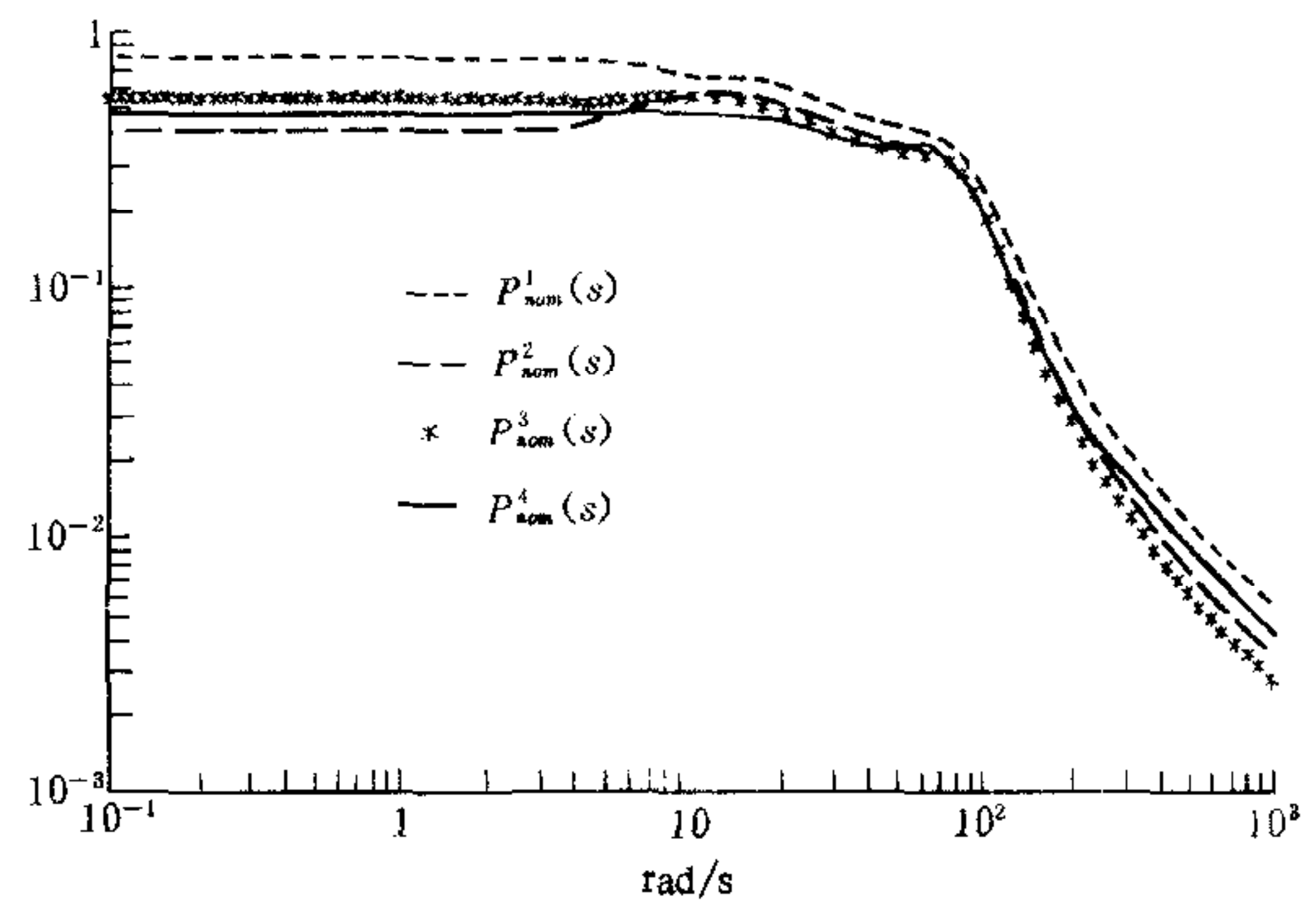


图2 名义模型的误差特性

参 考 文 献

- [1] Glover K, Limebeer D J N, Hung Y S. A structured approximation problem with application to frequency weighted model reduction. *IEEE Trans. AC*, 1992, **37**(4): 447--465.
- [2] Francis B A. *A Course in H_∞ Control Theory*. New York: Springer-Verlag, 1987.
- [3] Anderson B D O, Vongpanitlerd S V. *Network Analysis and Synthesis-A Modern System Theory Approach*. Prentice-Hall, 1973.

- [4] Kuraoka H, Ohka N, Ohba M, Hosoe S, Zhang F. Application of h-infinity design to automotive fuel control. *IEEE Control System Magazine*, 1990, **10**(2): 102—106.

NOMINAL MODEL SELECTION FOR CONTROL PLANT BASED ON HANKEL-NORM MODEL REDUCTION

ZHOU TONG

(The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

Abstract This paper investigates the problem concerning with plant nominal model selection when a batch of plant models have been supplied, with the nominal model intended use as robust controller design. A selection algorithm is proposed which is based on frequency weighted Hankel-norm model reduction. An illustrative example shows that compared with the plant nominal model selected intuitively, the approximation error of the plant nominal model obtained through the proposed algorithm is smaller, even though its complexity remains unchanged.

Key words Robust control, modelling, nominal model error, Hankel-norm.