短文

2-D 常系数线性离散系统可分性判定[1)]

杜春玲 邹云 杨成梧
(南京理工大学动力工程学院 南京 210094)

摘 要 针对二维常系数线性离散系统一般状态空间模型(2-DGM)的可分性判定问题进行探讨,给出了系统可分的若干判定法则,这些法则有助于进一步完善2-D系统现有的理论体系.

关键词 2-D 系统,可分性,线性离散系统.

1 引言

自 Roesser 等人[1]在处理2-D 滤波网络问题时提出2-D Roesser 模型(2-DRM)以来,2-D 状态空间理论不断得到发展和完善. 现有研究结果已表明:可分的 RM[2,3]具有许多相当好的特性,并在诸如系统实现、观测器设计、极点配置、系统综合设计等许多方面均有着不可取代的应用潜力[4],从而越来越多的人开始重视可分2-D 系统的研究. 本文在文献[2,3]的基础上,对2-DGM 的可分性的数值与代数判据进行深入研究,所得结论稍加改动,即对2-DRM 成立.

2 系统可分性判定

2-DGM 的状态方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(i+1,j+1) = &A_0\boldsymbol{x}(i,j) + A_1\boldsymbol{x}(i+1,j) + A_2\boldsymbol{x}(i,j+1) \\ &+ B_0\boldsymbol{u}(i,j) + B_1\boldsymbol{u}(i+1,j) + B_2\boldsymbol{u}(i,j+1).\end{aligned} \tag{1}$$

其中$(i,j)\geqslant(0,0)$为二元整值坐标,$\boldsymbol{x}(i,j)\in R^n$ 和 $\boldsymbol{u}(i,j)\in R^m$ 分别为状态和输入向量,$A_i,B_i(i=0,1,2)$为适当维数的实矩阵,边界条件为 $\boldsymbol{x}(i,0),\boldsymbol{x}(0,j)$.

记

$$A(z_1,z_2) = z_1z_2I - A_0 - z_1A_1 - z_2A_2, \tag{2}$$

$$P(z_1,z_2) = \det A(z_1,z_2) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}\, z_1^i\, z_2^j. \tag{3}$$

定理1. 系统(1)可分当且仅当 $\det(z_1I-A_2)$或 $\det(z_2I-A_1)$整除 $P(z_1,z_2)$.

1)国家自然科学基金资助项目.
收稿日期:1994-11-03

证明. 必要性是文献[3]中定理2的直接推论. 下证充分性. 设 $\det(z_1I-A_2)$ 整除 $P(z_1,z_2)$，则由文献[2]知

$$P(z_1,z_2)=\det(z_1I-A_2)\overline{P}(z_1,z_2). \tag{4}$$

由文献[5]中定义3不难知，$\overline{P}(z_1,z_2)$ 中将不会含有 z_1 的任何大于零的幂次，否则必与(3)式矛盾. 从而由文献[3]中定义2知本定理成立.

推论1. 若谱集 $\sigma(A_1)$ 或 $\sigma(A_2)$ 中的所有元均两两互异，则系统(1)可分当且仅当下列等式族[6]成立

$$\det A(\lambda,z_2)=0,\quad \forall\,\lambda\in\sigma(A_2)\text{ 固定}, \tag{5}$$

或

$$\det A(z_1,\mu)=0,\quad \forall\,\mu\in\sigma(A_1)\text{ 固定}. \tag{6}$$

推论2. 若 $0\overline{\in}\sigma(A_1)\cup\sigma(A_2)$，且 $\operatorname{rank} A_0<n$，则系统1必不可分. 证明略.

算法1.

步骤1. 计算1-D 谱集 $\sigma(A_1)$，$\sigma(A_2)$，若 $0\overline{\in}\sigma(A_1)\cup\sigma(A_2)$，则判定 $\operatorname{rank} A_0=n$ 否，若是则转入步骤2，否则系统必不可分；

步骤2. 若 $\sigma(A_1)$，$\sigma(A_2)$ 之一的所有元均两两互异，设式(5)成立，则转入步骤3，否则转入算法2的步骤2；

步骤3. 判定矩阵束族(5)中各个元是否奇异，若是则系统可分，否则不可分.

定理2. 系统(1)可分当且仅当存在 n 个互异实数 s_k，$1\leqslant k\leqslant n$，使得

$$P(z_1,s_j)=C_{oj}\det(z_1I-A_2),\quad 1\leqslant j\leqslant n, \tag{7}$$

或

$$P(s_i,z_2)=C_{io}\det(z_2I-A_1),\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{8}$$

式中 C_{oj} 与 C_{io} 分别为适当非零常数.

推论3. 设 $\{\lambda_i\}_1^{n_1}\subset\sigma(A_2)$ 与 $\{\mu_j\}_1^{n_2}\subset\sigma(A_1)$ 分别是 A_2 和 A_1 的所有互异特征值，其代数重数分别为 $\{k_i\}_1^{n_1}$ 和 $\{l_j\}_1^{n_2}$，则系统(1)可分的充要条件为

$$\operatorname{rank}(\lambda_iI-F_{oj})^{\alpha_{ij}}=n-k_i,\quad (1,1)\leqslant(i,j)\leqslant(n_1,n), \tag{9}$$

或

$$\operatorname{rank}(\mu_jI-F_{io})^{\beta_{ij}}=n-l_j,\quad (1,1)\leqslant(i,j)\leqslant(n,n_2). \tag{10}$$

式中

$$\alpha_{ij}=\operatorname{Index}(\lambda_iI-F_{oj}),\quad (1,1)\leqslant(i,j)\leqslant(n_1,n), \tag{11}$$

$$\beta_{ij}=\operatorname{Index}(\mu_jI-F_{io}),\quad (1,1)\leqslant(i,j)\leqslant(n,n_2), \tag{12}$$

$$F_{oj}=(s_jI-A_1)^{-1}(s_jA_2+A_0),\quad 1\leqslant j\leqslant n, \tag{13}$$

$$F_{io}=(s_iI-A_2)^{-1}(s_iA_1+A_0),\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{14}$$

算法2.

步骤1. 进行算法1的运算；

步骤2. 设 $\{\lambda_i\}_1^{n_1}$ 和 $\{\mu_j\}_1^{n_2}$ 分别为 $\sigma(A_2)$ 和 $\sigma(A_1)$ 中的单重特征值(若为复数，则其共轭无需考虑)，则针对相应于这些特征值的等式族(5)(或(6))，利用算法1的步骤3判定其是否均成立，若是则进行下一步，否则系统必不可分；

步骤3. 对所有满足 $k_i\geqslant 2$ 或 $l_j\geqslant 2$ 的 λ_i 或 μ_j，判定(9)(或(10))式是否成立，若均成

立,则系统可分,否则不可分.

上面讨论了一类便于机械运算的判别方法,下面引入另一类利用系统状态空间参数的"代数判据".

引理1. 若$\forall \lambda_i \in \sigma(A_2)$有

$$\min\{p_i,q_i\} \leqslant \operatorname{rank}(\lambda_i I - A_2)^{k_i或\alpha_i}(= n - k_i). \tag{15}$$

其中 k_i 和 α_i 分别为 λ_i 的代数和几何重数,而 p_i 和 q_i 分别为$(\lambda_i I-G(z_2))^{k_i}$在复数域上最大线性无关行数和列数,则

$$\det(z_1 I - G(z_2)) = \det(z_1 I - A_2). \tag{16}$$

其中

$$G(z_2) = A_2 + (z_2 I - A_1)^{-1}(A_1 A_2 + A_0). \tag{17}$$

引理2. 设 $\hat{G}(s)=C(sI-A)^{-1}B, A\in R^{n\times n}$,则 $\hat{G}(s)$在复数域上最大线性无关行数和列数分别为 p,q,当且仅当

$$\operatorname{rank}(CB,CAB,\cdots,CA^{n-1}B) = p, \tag{18}$$

且

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} CB \\ CAB \\ \vdots \\ CA^{n-1}B \end{bmatrix} = q. \tag{19}$$

由引理1,2及文献[3]中定理2可推得如下定理.

定理3. 记

$$p \triangleq \operatorname{rank}[D_i^{k_i}, \bar{C}_i \bar{A}_i^{k_i} \bar{B}_i, \cdots, \bar{C}_i \bar{A}_i^{2nk_i-1} \bar{B}_i], \tag{20}$$

$$q \triangleq \operatorname{rank}\begin{bmatrix} D_i^{k_i} \\ \bar{C}_i \bar{A}_i^{k_i} \bar{B}_i \\ \vdots \\ \bar{C}_i \bar{A}_i^{2nk_i-1} \bar{B}_i \end{bmatrix}. \tag{21}$$

若

$$\min(p,q) \leqslant n - k_i, \tag{22}$$

则系统(1)可分. 这里

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} \hat{A} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hat{B}\hat{C} & \hat{A} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \hat{B}\hat{C} & \hat{A} & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \hat{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{B}\hat{C} & \hat{A} \end{bmatrix}_{2nk_i \times 2nk_i} \tag{23}$$

$$\bar{B}_i = \begin{bmatrix} \hat{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_i = [0, \hat{C}_i] \tag{24}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & A \end{bmatrix}_{2n\times 2n}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}_{2n\times n}, \quad \hat{C}_i = [D_i, -I]_{n\times 2n}, \tag{25}$$

$$(A,B,C,D_i)=(A_1,A_0+A_1A_2,-I,\lambda_iI-A_2),\quad i=1,2,\cdots,\bar{n}_1, \tag{26}$$

或

$$(A,B,C,D_i)=(A_2,A_0+A_1A_2,-I,\mu_iI-A_1), \tag{27}$$

$i=1,2,\cdots,\bar{n}_2$. $\{\lambda_i\}_1^{\bar{n}_1}$和$\{\mu_j\}_1^{\bar{n}_2}$分别为 A_2和 A_1所有互异且共轭情形只取其一的特征值,k_i为 λ_i 或 μ_i 的代数重数.

限于篇幅,算例从略. 对较高阶(≤10阶)2-D FM(FM 总是可分的)的初步仿真结果表明:有关1-D 谱集数值结果的好坏,对本文所提算法是至关重要的.

参　考　文　献

[1] Givone D D, Roesser R P. M-D linear system theory. *IEEE Trans. Autorm. Contr.*, 1981, **26**(1):111—128.

[2] Zou Yun, Yang Chengwu. An algorithm for the computation of 2-D eigenvalues. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1994, **39**(7): 1436—1439.

[3] 邹云. N 维系统可分性的充要判据. 控制理论与应用. 1990,**7**(4):98—100.

[4] 杨成梧,邹云. 2-D 线性离散系统. 北京:国防工业出版社,1995.

[5] Kurek J E. The general state-space model for a 2-D linear digital systems. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1985, **30**(6):600—602.

[6] 杨成梧, 邹云. 广义系统观控性及正则束条件的数值判定. 自动化学报. 1991,**17**(4): 462—465.

THE SEPARATABILITY OF 2-D LINEAR SHIFT-INVARIANT DISCRETE SYSTEMS

DU CHUNLING　　ZOU YUN　　YANG CHENGWU

(School of Power Engineering & Dynamics, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094)

Abstract In this paper, the problem of testing the separability of 2-D linear shift-invariant discrete systems is discussed. On the basis of the existing results obtained by the authors, several new numerical and algebraic criteria are proposed in this paper. Here, the numerical criterion is both sufficient and necessary, while the algebraic criterion is only necessary. These results are beneficial for improving the theory of 2-D systems, and the improvements are, as far as we know, best in this field.

Key words 2-D systems, linear discrete systems, separability.