第23卷 第2期 自 动 化 学 报 Vol. 23, No. 2
1997年3月 ACTA AUTOMATICA SINICA March, 1997

短 文

对称非线性控制系统的串级解耦标准形[1)]

赵 军 井元伟 张嗣瀛
(东北大学自控系 沈阳 110006)

摘 要 证明了具有对称性的非线性控制系统存在局部的串级解耦标准形. 这种标准形由一个维数等于系统维数与对称性 Lie 群维数之差的独立子系统和一个不含控制量的子系统串联而成. 利用对称性和微分几何方法可将这种标准形构造出来.

关键词 对称性,标准形,非线性系统.

1 引言

非线性控制系统的对称性反映了大量实际系统的内在属性. 近期的研究结果表明,对称性在结构分解[1]、最优控制[2,3]、可控性[4-6]及可逆性[7]等方面均起着重要作用,但在对称系统标准形的结构方面,尚无结果报道.

按照几何控制理论[8],仿射非线性系统在局部可表示成含有若干积分器的标准形式,这对于系统分析与设计十分重要. 但将对称系统写成这种标准形却不能反映出对称性及由它带来的系统的独特性质. 本文给出的标准形不仅具有几何控制理论[8]中标准形的结构与属性,还具有特殊的串级解耦形式,这是由对称性带来的特殊结构,是一般标准形所不具备的. 这种串级解耦标准形由一个维数为系统维数与对称性 Lie 群维数之差的独立子系统和一个不含控制量的子系统串联而成. 这种特殊结构的标准形对于研究许多控制问题是很方便的.

2 对称性的若干结论

下面列举对称性的几个结论,证明略去.

设 M 是一个 n 维流形,G 是一个 k 维连通 Lie 群,它在 M 上有一个左作用

$\Phi: G\times M\rightarrow M,\quad (g,\boldsymbol{x})\rightarrow\Phi(g,\boldsymbol{x})=\Phi_g\boldsymbol{x}.$

称 M 上的向量场 f 及 C^∞ 函数 h 是对称的,若对任意 $g\in G,\boldsymbol{x}\in M$,下面两式分别成立:

$$(\Phi_g)_* f(\boldsymbol{x}) = f(\Phi_g\boldsymbol{x}), \tag{2.1}$$

1) 国家自然科学基金资助项目.
收稿日期:1995-02-25

$$h(\Phi_g x) = h(x). \tag{2.2}$$

易见对称向量场集 $SV(M)$ 是 $V(M)$ 的 Lie 子代数，对称 C^∞ 函数集 $SC^\infty(M)$ 是 $C^\infty(M)$ 的线性子空间. 假定 Φ 是自由和正常的，从而商流形 M/G 是 $n-k$ 维流形. 记 P：$M \to M/G$ 为自然投影.

引理1. $SC^\infty(M)$ 到 $C^\infty(M/G)$ 上的映射 $h \to \tilde{h}$ 是线性同构，其中 $\tilde{h}(\tilde{x}) = h(P^{-1}(\tilde{x}))$.

引理2. 若 $f \in SV(M)$，$h \in SC^\infty(M)$，则 $L_f h \in SC^\infty(M)$.

引理3. 对任意 $x \in M$，$h \in SC^\infty(M)$，存在 x 的局部坐标 $x_1, \cdots, x_n$，使 $h(x) = h(x_1, \cdots, x_{n-k})$.

给定 M 上的非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x), \tag{2.3a}$$

$$y_j = h_j(x), \quad j = 1, \cdots, s. \tag{2.3b}$$

若 $f, g_i \in SV(M)$，$h_j \in SC^\infty(M)$，则称此系统是对称的. 此时它的商系统定义为 M/G 上的系统

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \tilde{g}_i(\tilde{x})$$

$$\triangleq P_* f(q) + \sum_{i=1}^{m} u_i P_* g_i(q), \tag{2.4a}$$

$$\tilde{y}_j = \tilde{h}_j(\tilde{x}) \triangleq h_j(q), \quad j = 1, \cdots, s, \tag{2.4b}$$

其中　$\tilde{x} \in M/G$，$q \in P^{-1}(\tilde{x})$.

3　串级解耦标准形

假定系统(2.3)具有对称性且 $s=m$. 易知系统(2.3)与其商系统(2.4)的相关度有如下关系：

引理4. 系统(2.3)在 $x \in M$ 有向量相关度 $(r_1, \cdots, r_m)$ 的充要条件是其商系统(2.4)在 $P(x) \in M/G$ 有向量相关度 $(r_1, \cdots, r_m)$.

下面给出串级解耦标准形.

定理1. 设系统(2.3)在 x_0 有向量相关度 $(r_1, \cdots, r_m)$，Span$\{g_1, \cdots, g_m\}$ 是对合分布，则存在 x_0 的局部坐标 $\xi_1^1, \cdots, \xi_{r_1}^1, \cdots, \xi_1^m, \cdots, \xi_{r_m}^m, \xi_{\rho+1}, \cdots, \xi_{n-k}, \eta_{n-k+1}, \cdots, \eta_n$，使系统(2.3)有如下的串级解耦标准形：

$$\dot{\xi}_1^i = \xi_2^i,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\dot{\xi}_{r_i-1}^i = \xi_{r_i}^i, \tag{3.1a}$$

$$\dot{\xi}_{r_i}^i = b_i(\xi) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\xi) u_j, \quad i = 1, \cdots, m,$$

$$\dot{\xi}_j = l_j(\xi), \quad j = \rho + 1, \cdots, n - k,$$

$$\dot{\eta}_j = q_j(\xi, \eta), \quad j = n - k + 1, \cdots, n,$$

$$y_j = \xi_1^j,\quad j = 1,\cdots,m, \tag{3.1b}$$

其中 $\rho=\sum_{i=1}^{m} r_i$, $\xi=(\xi_1^1,\cdots,\xi_{r_1}^1,\cdots,\xi_1^m,\cdots,\xi_{r_m}^m,\xi_{\rho+1},\cdots,\xi_{n-k})^{\mathrm{T}}$, $\eta=(\eta_{n-k+1},\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}$.

证明. 只证单输入单输出情形，多输入多输出情形完全类似. 由引理4知 $r\leqslant n-k$. 当 $r=n-k$ 时，与文献[8]类似，选择坐标变换 $\xi=\varphi(x)$，在此坐标下系统(2.3)可表示为

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2,\\
&\cdots\cdots\\
\dot{\xi}_{n-k-1} &= \xi_{n-k},\\
\dot{\xi}_{n-k} &= L_f^{n-k}h(x)|_{x=\varphi^{-1}(\xi)} + L_gL_f^{n-k-1}h(x)u|_{x=\varphi^{-1}(\xi)},\\
\dot{\xi}_{n-k+1} &= q_{n-k+1}(\xi),\\
&\cdots\cdots\\
\dot{\xi}_n &= q_n(\xi),
\end{aligned} \tag{3.2a}$$

$$y = \xi_1. \tag{3.2b}$$

由于 $dh,\cdots,dL_f^{n-k-1}h$ 在 x_0线性无关，根据引理2、引理3及反函数定理，可将(3.2)式表示成(3.1)式.

当 $r<n-k$ 时，由微分几何理论知，可选出 $\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_{n-k-r}\in C^\infty(M/G)$ 且 $d\tilde{\lambda}_1,\cdots,d\tilde{\lambda}_{n-k-r}\in\mathrm{span}\{\tilde{g}\})^\perp$，使得 $d\tilde{h},\cdots,dL_{\tilde{f}}^{r-1}\tilde{h},d\tilde{\lambda}_1,\cdots,d\tilde{\lambda}_{n-k-r}$在 $P(x_0)$线性无关. 从而不难证明 $dh,\cdots,dL_f^{r-1}h,d\lambda_1,\cdots,d\lambda_{n-k-r}$在 x_0线性无关，且 $dh,\cdots,dL_f^{r-2}h,d\lambda_1,\cdots,d\lambda_{n-k-r}\in(\mathrm{span}\{g\})^\perp$. 由于 $\mathrm{span}\{g\}$是非奇异对合分布，$dL_f^{r-1}h\notin(\mathrm{span}\{g\})^\perp$，故可选择 $\mu_1,\cdots,\mu_k\in C^\infty(M)$, $d\mu_1,\cdots,d\mu_k\in(\mathrm{span}\{g\})^\perp$，使 $dh,\cdots,dL_f^{r-1}h,d\lambda_1,\cdots,d\lambda_{n-k-r},d\mu_1,\cdots,d\mu_k$ 在 x_0处线性无关. 现选择 $\xi=\varphi(x)$如下：

$$\begin{aligned}
\xi_i &= \varphi_i(x) = L_f^{i-1}h(x),\quad i = 1,\cdots,r,\\
\xi_i &= \varphi_i(x) = \lambda_{i-r}(x),\quad i = r+1,\cdots,n-k,\\
\xi_i &= \varphi_i(x) = \mu_{i-n+k}(x),\quad i = n-k+1,\cdots,n.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

在此坐标下，系统(2.3)可表成

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2,\\
&\cdots\cdots\\
\dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r,\\
\dot{\xi}_r &= L_f^r h(x)|_{x=\varphi^{-1}(\xi)} + L_gL_f^{r-1}h(x)u|_{x=\varphi^{-1}(\xi)},\\
\dot{\xi}_{r+1} &= L_f\,\lambda_1(x)|_{x=\varphi^{-1}(\xi)},\\
&\cdots\cdots\\
\dot{\xi}_{n-h} &= L_f\,\lambda_{n-k-r}(x)|_{x=\varphi^{-1}(\xi)},\\
\dot{\xi}_{n-k+1} &= L_f\,\mu_1(x)|_{x=\varphi^{-1}(\xi)},\\
&\cdots\cdots\\
\dot{\xi}_n &= L_f\,\mu_k(x)|_{x=\varphi^{-1}(\xi)},
\end{aligned} \tag{3.4a}$$

$$y = \xi_1. \tag{3.4b}$$

由引理2知 $L_g^i L_f^j h, L_f \lambda_t \in SC^\infty(M)$， $i=0,1$， $j \geqslant 0$， $1 \leqslant t \leqslant n-k-r$. 由引理3及反函数定理可将(3.4)式表成(3.1)式的形式.

显然，(3.1a)的前 $n-k$ 个方程形成了一个独立的子系统，它与后 k 个不含控制量的方程所确定的子系统呈串联形式.

4 例子

考虑 $M=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_4)^{\mathrm{T}} \mid x_i>0, i=1,\cdots,4\}$ 上的系统

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1^2 x_3^{-1} \\ x_2 \\ x_4^{-1} x_3^2 \\ x_1^{-1} x_3 x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^2 x_2^{-1} \\ x_1 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix} u, \tag{4.1a}$$

$$y = x_1^{-1} x_2. \tag{4.1b}$$

直接计算知此系统在任一点的相关度 $r=2$. 取 Lie 群 $G=(0,+\infty)$，其中群运算为普通乘法. 显然 $k=1$. 令 Φ: $G \times M \to M, (\omega, \boldsymbol{x}) \to \Phi_\omega \boldsymbol{x} = \omega \boldsymbol{x}$ 为数乘向量. 易验证系统(4.1)相应于如上选取的 G 和 Φ 为对称系统. 按定理1选择坐标变换为

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \varphi_1(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x}) = x_1^{-1} x_2, \\ \xi_2 &= \varphi_2(\boldsymbol{x}) = L_f h(\boldsymbol{x}) = x_1^{-1} x_2 + x_2 x_3^{-1}, \\ \xi_3 &= \varphi_3(\boldsymbol{x}) = \lambda_1(\boldsymbol{x}) = x_3^{-1} x_4 \in SC^\infty(M), \\ \xi_4 &= \varphi_4(\boldsymbol{x}) = \mu_1(\boldsymbol{x}) = x_1^{-1} x_2 \ln x_2 + \ln x_4. \end{aligned} \tag{4.2}$$

在此坐标下，系统(4.1)为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= 2\xi_2 - \xi_1 - (\xi_2 - \xi_1)\xi_3^{-1} + (\xi_2 - \xi_1)(\xi_1^{-1} + 1)u, \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_1 \xi_3 (\xi_2 - \xi_1)^{-1} - 1, \\ \dot{\xi}_4 &= (\xi_1 + 1)^{-1} \xi_2 (\xi_4 + \ln(\xi_2 - \xi_1)\xi_3^{-1}) + \xi_1 + \xi_1(\xi_2 - \xi_1)^{-1}, \end{aligned} \tag{4.3a}$$

$$y = \xi_1. \tag{4.3b}$$

显然(4.3a)的前3个方程为一个独立的子系统，它与第4个方程呈串联形式.

参 考 文 献

[1] Grizzle J W, Marcus S I. The structure of nonlinear control systems possessing symmetries. *IEEE Trans. Auto. Contr.* 1985, **30**: 248—258.

[2] Van der schaft A J. On symmetries in optimal control. In: Proc. 25th IEEE Conf. Decision and Control. 1986, 482—486.

[3] Grizzle J W, Marcus S I. Uptimal control of systems possessing symmetries. *IEEE Trans. Auto.* 1984, **29**: 1037—1040.

[4] Zhao Jun, Zhang Siying. On the controllability of nonlinear systems with symmetry. *Systems & Control Letters*. 1992, **18**: 445—448.

[5] 赵军，张嗣瀛. 非线性控制系统的广义对称性与可控性. 科学通报，1991，**36**(18)：1429－1431.

[6] Sussmann H J. A general theorem on symmetries and local controllability. In: Proc. 24th IEEE Conf. Decision and Control. 1985, 27－32.

[7] 赵军，张嗣瀛. 对称系统可逆性的简化条件. 自动化学报，1995，**21**(2)：184－188.

[8] Isidori A. Nonlinear control systems. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[9] 程代展. 非线性系统的几何理论. 北京：科学出版社，1988.

A NORMAL FORM WITH CASCADE DECOMPOSITION OF SYMMETRIC NONLINEAR CONTROL SYSTEMS

ZHAO JUN JING YUANWEI ZHANG SIYING

(*Department of Automatic Control, Northeastern University, Shenyang* 110006)

Abstract It is shown that a nonlinear control system possessing symmetries has locally a normal form with cascade decomposition. This normal form consists of two subsystems. One is a independent subsystem of the dimension equal to the difference of the dimensions between the total system and the symmetry Lie group. The other is a subsystem without controls. Using differential geometric method and choosing properly a few symmetric functions of coordinate transformation whose Lie derivatives with respect to input vector fields all vanish, we can construct the normal form.

Key words Symmetries, normal form, nonlinear systems.