



# 典型振荡过程动态矩阵控制的性能分析

席裕庚

(上海交通大学自动化研究所 上海 200030)

**摘要** 基于动态矩阵控制的闭环传递函数,研究了典型振荡过程在动态矩阵控制下的系统性能,给出了主要设计参数与系统稳定性、动态响应的若干重要关系,提供了分析此类系统的理论基础.

**关键词** 预测控制,动态矩阵控制,振荡过程,稳定性,动态响应.

## 1 引言

动态矩阵控制(DMC)是最常用的预测控制算法之一,已在炼油、化工等行业的过程控制中获得了成功的应用.近年来,关于预测控制理论分析的文献虽时有报道<sup>[1-2]</sup>,但大多只能提供设计参数与性能的极限关系,有些则离开了算法的本来形式,因而不能为分析与评价系统性能提供有力的支持.

为了深入了解动态矩阵控制系统的性能,基于其闭环传递函数的表达式<sup>[3]</sup>,本文继文献[4]之后,进一步针对典型振荡过程的动态矩阵控制进行了深入的理论分析,得到了这类系统动态响应、稳定性与设计参数间的若干重要定量关系,从而可以直接依据设计参数准确地估价控制系统的稳定性和动态响应,为参数选择和调整提供了有效的理论依据.

## 2 典型二阶振荡过程动态矩阵控制的闭环传递函数

考虑具有固有频率  $\omega_0$  和阻尼系数  $\xi (< 1)$  的典型二阶振荡对象,其传递函数为

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2} \quad (1)$$

该系统的阻尼固有频率为  $\omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ , 振荡周期为  $T_0 = 2\pi/\omega_n$ . 由于采用时标变换  $\bar{t} = \omega_n t / 2\pi$  总可将振荡周期规范化为  $\bar{T}_0 = 1$ , 频率  $\bar{\omega}_n = 2\pi$ , 故不妨假设  $T_0 = 1, \omega_n = 2\pi$ , 这时系统的单位阶跃响应为

$$a(t) = 1 - \frac{e^{-2\pi\xi t}}{s_1} \sin\left(2\pi t + \text{tg}^{-1} \frac{1}{s_2}\right) \quad (2)$$

1) 国家自然科学基金和国家教委基金资助.

收稿日期:1995-04-21

其中  $s_1 = \sqrt{1-\xi^2}$ ,  $s_2 = \xi/s_1$ , 取采样周期为  $T (< 0.25)$ , 则可得阶跃响应的采样值为

$$a_i = 1 - \sigma^i (s_2 \sin i\Omega + \cos i\Omega), \quad (3)$$

其中  $\Omega = 2\pi T$ ,  $\sigma = \exp(-\Omega s_2)$ . 显然  $0 < \sigma < 1$ ,  $0 < \Omega < \pi/2$ .

系统(1)在经采样和零阶保持后的  $Z$  传递函数为

$$G(z) = \frac{m(z)}{p(z)} = \frac{m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}}, \quad (4)$$

其中  $p_1 = -2\sigma \cos\Omega$ ,  $p_2 = \sigma^2$ ,

$$m_1 = 1 - \sigma(s_2 \sin\Omega + \cos\Omega), \quad m_2 = \sigma^2 + \sigma(s_2 \sin\Omega - \cos\Omega).$$

现考虑对上述对象采用动态矩阵控制算法<sup>[3]</sup>, 即在任一采样时刻  $k$ , 选择即时控制增量  $\Delta u(k)$ , 使系统输出在未来  $P$  个时刻的优化时域内满足下列性能指标:

$$\min_{\Delta u(k)} J(k) = \sum_{j=1}^P [y(k+j) - w(k+j)]^2 + r \Delta u^2(k), \quad (5)$$

其中  $w(k+j)$  为给定的未来输出期望值. 显然, 控制系统的性能将只取决于优化时域  $P$  和控制权  $r$ .

根据预测模型提供的输入输出关系, 可得到最优控制律

$$\Delta u(k) = \sum_{j=1}^P d_j [w(k+j) - y_0(k+j)], \quad (6)$$

其中  $y_0(k+j)$  为  $k$  时刻对应于  $\Delta u(k) = 0$  的原始输出, 而

$$d_i = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^P a_j^2 + r}, \quad i = 1, \dots, P. \quad (7)$$

根据文献[3], 在不考虑模型失配时, 该系统的闭环传递函数为

$$F_s(z) = \frac{d_s m(z)}{p^*(z)}, \quad (8)$$

式中  $d_s = d_1 + \dots + d_P$ ,  $p^*(z)$  的系数可由  $p(z)$  的系数经变换得到, 详见文献[3].

为了进行系统分析, 首先给出式(3)及相关参数应满足的若干关系

**性质2.1.** 对于式(3)中的  $a_i$ , 有下式成立.

$$a_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$(a_{i+1} - a_i) - 2\sigma \cos\Omega (a_i - a_{i-1}) + \sigma^2 (a_{i-1} - a_{i-2}) = 0, \quad i \geq 2, \quad (10)$$

$$a_i - 2\sigma \cos\Omega a_{i-1} + \sigma^2 a_{i-2} = 1 - 2\sigma \cos\Omega + \sigma^2, \quad i \geq 2. \quad (11)$$

**性质2.2.** 对于式(4)中的  $m_1, m_2$ , 有

$$m_1 > |m_2|. \quad (12)$$

### 3 控制权系数 $r=0$ 时的系统性能分析

由文献[3]可知, 当  $r=0$  时, 系统  $Z$  传递函数(8)的分母多项式为

$$p^*(z) = 1 + p_1^* z^{-1} + p_2^* z^{-2}. \quad (13)$$

其中

$$p_1^* = b_{20} - 1 - 2\sigma \cos\Omega, \quad p_2^* = \sigma^2 (b_{20} - d_{p0} a_{p+1}),$$

这里  $b_{20} = \left( \sum_{j=1}^P a_j a_{j+1} \right) / \sum_{j=1}^P a_j^2$ ,  $d_{p0} = a_p / \sum_{j=1}^P a_j^2$ .

### 3.1 稳定性分析

根据式(8),(13),系统的稳定性取决于其分母多项式  $p^*(z)$  的系数,其稳定的充要条件为

$$\begin{aligned} 1 + p_1^* + p_2^* &= 1 + (b_{20} - 1 - 2\sigma \cos\Omega) + \sigma^2(b_{20} - d_{p0} a_{p+1}) > 0, \\ 1 - p_1^* + p_2^* &= 1 - (b_{20} - 1 - 2\sigma \cos\Omega) + \sigma^2(b_{20} - 1 - d_{p0} a_{p+1}) > 0, \\ 1 > p_2^* &= \sigma^2(b_{20} - d_{p0} a_{p+1}). \end{aligned} \quad (14)$$

**定理3.1.** 典型二阶系统(4)在采用性能指标(5)的动态矩阵控制且  $r=0$  时,不论优化时域  $P$  取何值,总是稳定的. 证明从略.

### 3.2 动态响应分析

记  $\Delta = p_1^{*2} - 4p_2^*$ , 当  $\Delta < 0$  时,式(13)有一对共轭复根,可用一标准二阶  $Z$  传递函数近似控制系统  $Z$  传递函数的分母多项式. 即

$$p^*(z) = 1 - 2\sigma^* \cos\Omega^* z^{-1} + \sigma^{*2} z^{-2}. \quad (15)$$

对比式(13),可以得到

$$\sigma^* = \sqrt{p_2^*}, \quad \Omega^* = \cos^{-1}(-p_1^*/2\sigma^*) = \cos^{-1}(-p_1^*/2\sqrt{p_2^*}). \quad (16)$$

从而可知系统的阻尼固有频率与阻尼系数分别为

$$\omega_n^* = \Omega^*/T = \cos^{-1}(-p_1^*/2\sqrt{p_2^*})/T, \quad \xi^* = \frac{\eta^*}{\sqrt{\eta^{*2} + \omega_n^{*2}}}. \quad (17)$$

此处  $\eta^* = -\ln\sigma^*/T$ , 为拟合其实际响应进一步选择阶跃响应

$$a^*(t) = 1 - \frac{e^{-\eta^* t}}{\sqrt{1 - \xi^{*2}}} \sin\left(\omega_n^* t + \text{tg}^{-1} \frac{\omega_n^*}{\eta^*}\right), \quad (18)$$

由此可求出最大超调量为

$$C_{\max} = \exp(-\eta^* \pi / \omega_n^*). \quad (19)$$

上述分析表明,对于二阶典型振荡对象,在采用本文的动态矩阵控制策略且  $r=0$  时,可得一稳定的二阶系统,其阻尼频率与阻尼系数可由式(17)给出,振荡响应可由式(18)描述,最大超调量可由式(19)计算. 在对象阻尼  $\xi$  和采样周期  $T$  确定后,它们都取决于优化时域  $P$ .

## 4 控制权系数 $r \neq 0$ 时的系统性能分析

当  $r \neq 0$  时,记  $\alpha = \sum_{j=1}^P a_j^2 / \left( \sum_{j=1}^P a_j^2 + r \right)$ , 显然有  $0 < \alpha < 1$ . 根据文献[3],这时系统  $Z$  传递函数的分母多项式为

$$p^*(z) = 1 + p_1^* z^{-1} + p_2^* z^{-2} + p_3^* z^{-3}, \quad (20)$$

其中的系数经推导可得

$$\begin{aligned} p_1^* &= \alpha b_{20} - 1 - 2\sigma \cos\Omega, \\ p_2^* &= \alpha \sigma^2 (b_{20} - d_{P0} a_{P+1}) + (1 - \alpha)\sigma(\sigma + 2 \cos\Omega), \\ p_3^* &= (\alpha - 1)\sigma^2. \end{aligned} \quad (21)$$

注意在式中出现的变量中只有  $\alpha$  与  $r$  有关. 该系统稳定的充要条件为

$$\begin{aligned} 1 + p_1^* + p_2^* + p_3^* &> 0, & 3 + p_1^* - p_2^* - 3p_3^* &> 0, \\ 1 - p_1^* + p_2^* - p_3^* &> 0, & p_3^{*2} - 1 &< p_1^* p_3^* - p_2^*. \end{aligned} \quad (22)$$

代入并整理后可得

$$\alpha [b_{20} - 2\sigma \cos\Omega + \sigma^2 (b_{20} - d_{P0} a_{P+1})] > 0, \quad (23.a)$$

$$2(1 - \alpha)(1 + 2\sigma \cos\Omega + \sigma^2) + \alpha [1 - (b_{20} - 1 - 2\sigma \cos\Omega) + \sigma^2 (b_{20} - d_{P0} a_{P+1})] > 0, \quad (23.b)$$

$$2(1 - \alpha)(1 - 2\sigma \cos\Omega + \sigma^2) + 2\alpha(1 - \sigma \cos\Omega) + \alpha(1 - \sigma^2)b_{20} + \alpha \sigma^2 d_{P0} a_{P+1} > 0 \quad (23.c)$$

$$P(\alpha) = A\alpha^2 + B\alpha + C > 0, \quad (23.d)$$

此处参数  $A, B, C$  只与系统阻尼系数  $\xi$ 、采样周期  $T$  及优化时域  $P$  有关, 而与控制权  $r$  无关.

$$\begin{aligned} A &= \sigma^2 (b_{20} - \sigma^2), \\ B &= 2\sigma^4 + 2\sigma \cos\Omega (1 - \sigma^2) - \sigma^2 (2b_{20} - d_{P0} a_{P+1}), \\ C &= (1 - \sigma^2)(1 - 2\sigma \cos\Omega + \sigma^2). \end{aligned} \quad (24)$$

**定理4.1.** 典型二阶系统(4)在采用性能指标(5)的动态矩阵控制且  $r \neq 0$  时, 若  $P$  的选择使  $B^2 - 4AC \geq 0$ , 则当  $r_2 \leq r \leq r_1$  时, 系统是不稳定的. 其余情况下, 系统是稳定的, 其中  $r_2, r_1$  对应的  $\alpha_2, \alpha_1$  分别是  $P(\alpha)$  的两实根且  $1 > \alpha_2 \geq \alpha_1 > 0$ . (证明从略)

上述分析得到了一个很有意义的结论, 即对于典型二阶振荡对象, 当采用所选动态矩阵控制策略且  $r \neq 0$  时, 并非如通常文献所述或直观理解加大  $r$  就有利于系统稳定. 随着  $r$  由 0 增大, 系统有可能变得不稳定, 形成振荡发散, 然后再随着  $r$  继续增大逐渐恢复稳定.

由于  $\alpha_1, \alpha_2$  取决于系数  $A, B, C$ , 而当对象阻尼  $\xi$  及采样周期  $T$  均给定时, 它们只取决于优化时域  $P$ , 故可由式(24)求出不同  $P$  时使系统稳定的  $r$  的范围. 例如图1给出了当  $\xi = 0.2$  时  $r$  的稳定区域与  $T, P$  的关系. 从图中可看出, 若  $T = 0.04$ , 选取  $P = 2$ , 则当  $0.03 \leq r \leq 1$  时系统是不稳定的. 图2的仿真结果准确地验证了上述理论分析的正确性.

当  $r \neq 0$  时, 典型振荡系统经动态矩阵控制后呈三阶响应, 对照  $p^*(z)$  的表

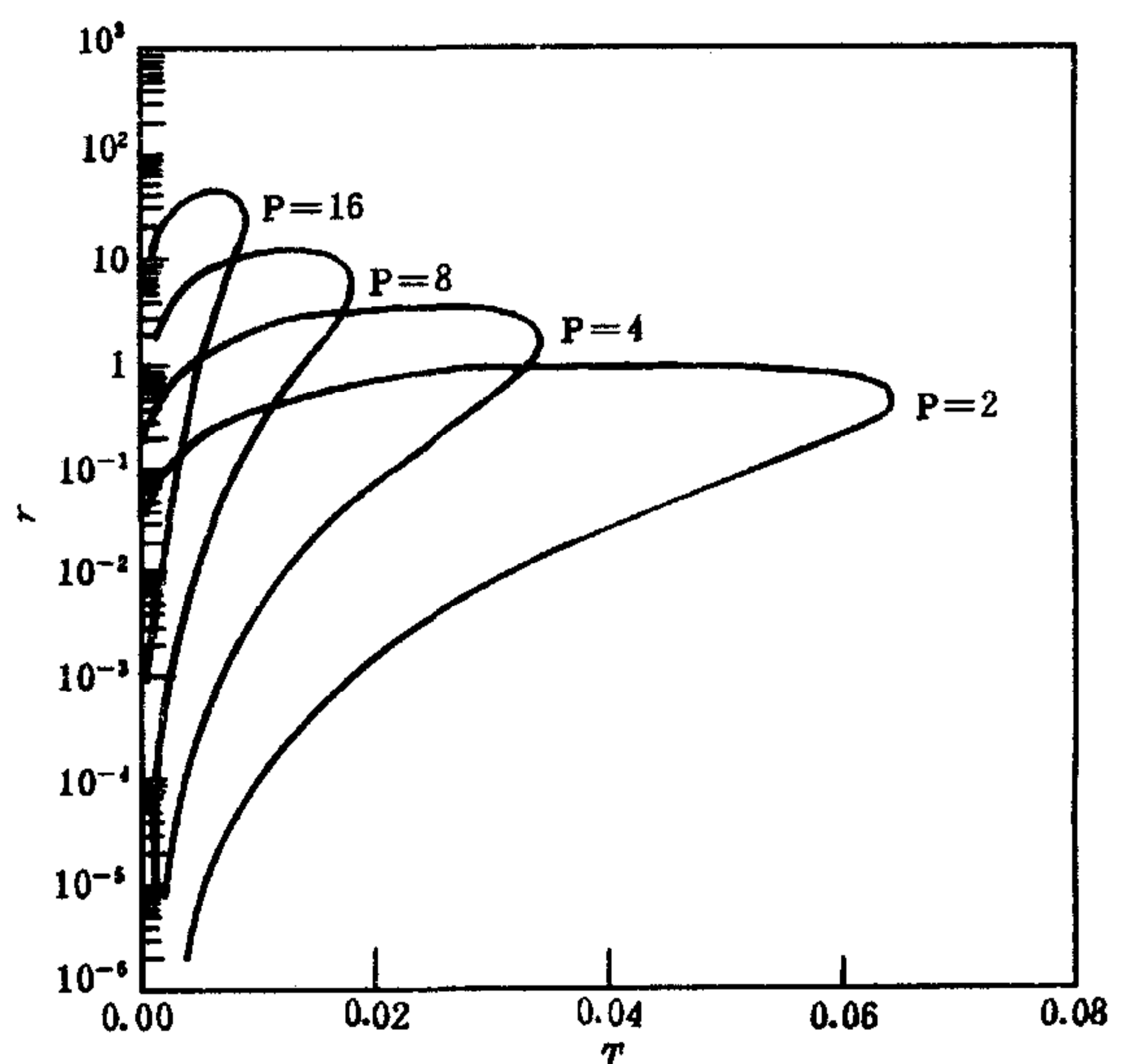


图1  $r$  的稳定域与  $T, P$  的关系 ( $\xi = 0.2$ )

达式(21)可知,对于充分小的  $r$  即  $\alpha \rightarrow 1$ ,有  $p_3^* \rightarrow 0$ ,其动态响应接近于二阶过程,而当  $r$  增大时,另一个特征运动的作用明显增强,当  $r \rightarrow +\infty$  即  $\alpha \rightarrow 0$ 时,式(23. a)趋于0,表明系统有一接近于  $z=1$ 的实根. 它将是系统响应的主特征运动,从图2的仿真结果中可以看出  $r$  变化时上述分析的正确性.

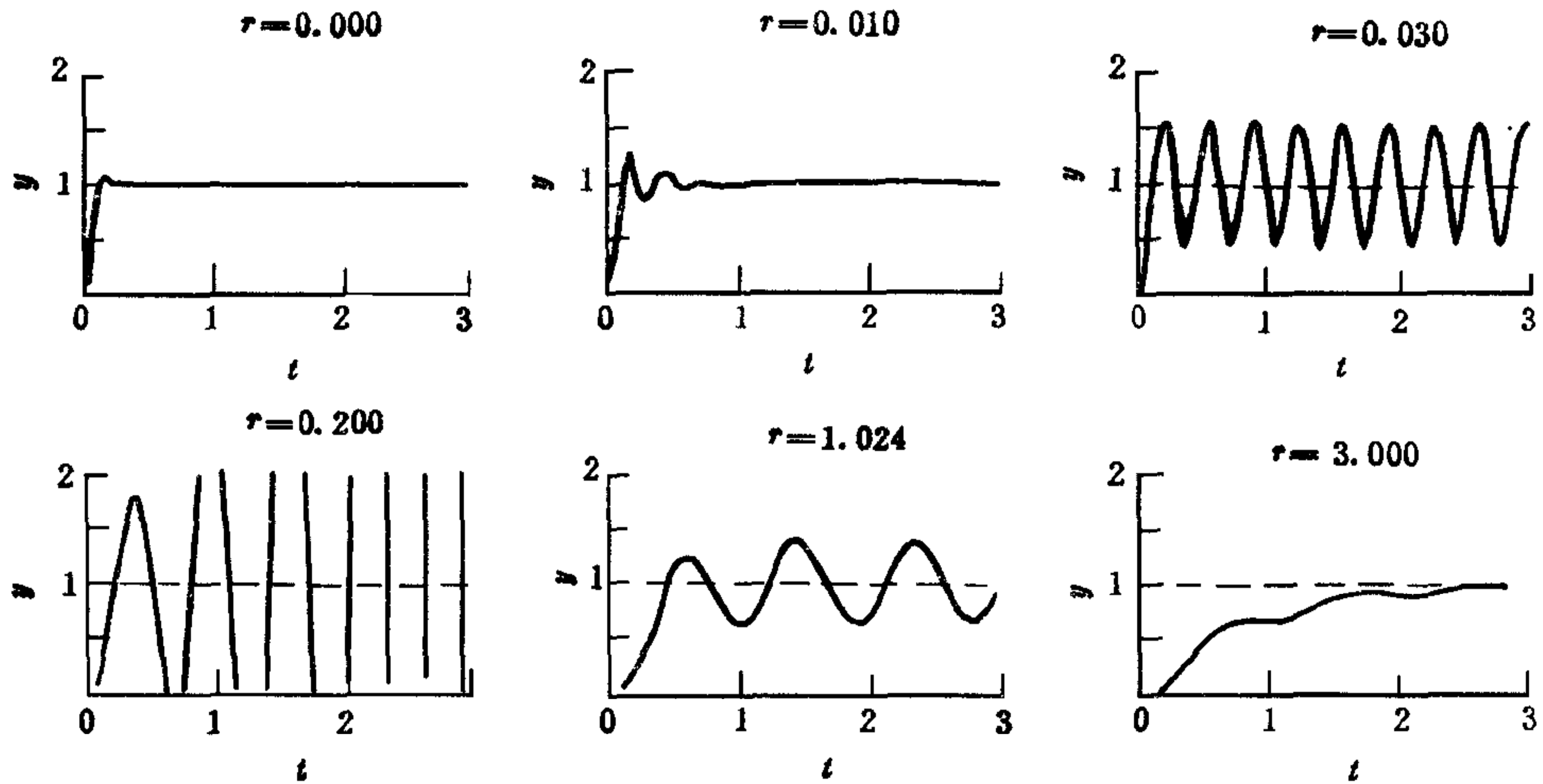


图2  $\xi=0.2$ 对象的仿真结果与  $r$  的关系 ( $T=0.04, P=2$ )

## 5 结语

本文从动态矩阵控制的闭环传递函数出发,从理论上研究了典型二阶振荡过程动态矩阵控制的稳定性和动态响应. 本文的结果虽然是针对一类特殊对象的,但给出了大量存在的振荡过程在预测控制时性能分析的理论依据,其结论比一般分析更为具体,参数与性能的关系是直接的解析关系,对于理解设计参数对系统性能影响的复杂性也有一定的意义.

## 参 考 文 献

- [1] Marchetti J L, Mellicamkp D A, Seborg E. Predictive control based on discrete convolution models. *Process Des. Dev.*, 1983, **22**: 488—495.
- [2] McINTosh A R., Shah S R, Fisher D G. Analysis and tuning of adaptive generalized predictive control. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 1991, **69**(1):97—110.
- [3] Xi Y. The Minimal form of the predictive controller based on the step-response model, *Int. J. Control*, 1989, **49**(1):57—64.
- [4] 席裕庚, 厉隽悻. 一类工业过程预测控制的闭环分析. *自动化学报*, 1995, **21**(1):1—8.

## PERFORMANCE ANALYSIS OF DYNAMIC MATRIX CONTROL FOR TYPICAL OSCILLATION PROCESSES

XI YUGENG

(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

**Abstract** In this paper, based on the closed-loop transfer function of dynamic matrix control, the system performances of typical oscillation processes under dynamic matrix control are analysed. Some important relations between the key design parameters and the system stability and dynamical response are obtained. The new results provide the theoretical basis for analysing these systems.

**Key words** Predictive control, dynamic matrix control, oscillation process, stability, dynamical response.



(上接179页)

王寿云同志、于景元同志、戴汝为同志、  
汪成为同志、钱学敏同志、涂元季同志:

我近得戴汝为同志赠浙江科学技术出版社1995年12月出版的《智能系统的综合集成》,书的作者为戴汝为、王珏、田捷.此书系《智能自动化丛书》之首册;丛书编委会由宋健同志任名誉主编,戴汝为同志为主编,编委共24人,其中有于景元同志、路甬祥同志、潘云鹤同志.浙江科学技术出版社在《出版说明》中,将此丛书与信息革命联系起来,想也是宋健同志任名誉主编的含意.由此引起我想到以下几点,写下来请诸位考虑对不对?

1. 信息革命实是产业革命,即我们说的第五次产业革命.所以宋健同志任名誉主编的这部《智能自动化丛书》,也可以说是一部第五次产业革命的丛书.

2. 戴汝为、王珏、田捷同志在丛书第一册就把一切智能系统都放在我们说的“大成智慧”和“从定性到定量综合集成法”来思考.从而把我们的理论同第五次产业革命联在一起了.

过去几十年世界的自动化科学技术发展,形成两大块,一是由所谓软件技术发展起来,现在出现了CIMS、CAE,以至灵境技术、Virtual prototyping 等等.二是所谓 AI.而现在这两大块又趋于融合,都是人-机结合的智能系统.《智能系统的综合集成》自始至终都阐述了这个观点.所以几十年来自动化科学技术终于走入“大成智慧”和信息革命.这证实了第五次产业革命的到来.

3. 所以我想大家能不能把诸位正计划要写的那部书:讲开放的复杂巨系统的专著也放到宋健同志任名誉主编的丛书里去?而且诸位计划要写的那篇讲第五次产业革命的文章也正好作为书的开篇?

此意诸位如觉得有道理,也可以托于景元同志就便问问宋健同志,看宋健同志有什么意见.

以上3条,是我读了戴汝为、王珏、田捷的《智能系统的综合集成》一书想到的,也是解决出书难的问题.就写这么多,请酌.

此致

敬礼!

钱学森  
1996. 1. 14