基于数学形态学的分形编码

曹 磊
（中国科技大学电子技术部 合肥 230026）

韦 穗 孔 兵
（中国科学院合肥智能机械研究所 合肥 230031）

摘 要 从分形的基本性质出发，把数学形态学中的基本运算（如膨胀）发展到一个变尺度的多级矢量迭代过程. 由两者的结合，提出了一个新的分形编码的方法. 它以形态学中的结构元素 B 以及尺度变化率 r 作为分形的信息进行存储及生成，并从求骨架关节点方法中寻求这个编码，给出实验结果，并与传统的迭代函数系统(IFS)的分形编码做了比较.

关键词 分形，数学形态学，多级变尺度矢量迭代，编码.

1 分形的性质及其 IFS 编码

山、云、闪电、雪花的边缘等这些自然界中司空见惯而又极其复杂的形状，它们表现的常常是一种几乎处处连续则又处处不可导的性质，直到70年代末它们才被美国科学家 B. B. Mandelbrot 归入他所创立的“分形集”中，从此它们在组织结构，表现形态上得到了一个极其简洁的描述.

分形一般具有两个性质：（1）比例性，大多数分形在一定的范围内是比例不变的，即在这个范围内，其不规则程度（常以分数维度量）在任意尺度下都是一样的；（2）自相似性，按照统计的观点，几乎所有的分形又是置换（移位、旋转、缩放等）不变的，即它的每一部分在统计的意义上与其它任何部分相似，这两个性质表明了分形表面上的混乱及复杂具有内在的规则性，它揭示了自然界中的一个根本哲理：无限细分性.

Mandelbrot 从分数维上对分形进行了描述，把它作为一个重要的特征量，用来比较、区分各类分形集. 然而对分数维相同或相近的不同分形又如何比较？尤其如何对分形在组织结构上进行定量化的描述？直到1985年美国 M. F. Barnsley, S. Demko 等提出了迭代函数系统、(Iterated Function System)，为这类问题的解决提供了方法. 该系统是由一组或几组由若干仿射变换（一种最广泛的线性变换）组成的 IFS 的参数来作为分形的编码进行描述的[1,2]. 一个含概率的 IFS 定义为

$$\left\{R^2 \mid w_i\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_i & b_i\\c_i & d_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e_i\\f_i\end{pmatrix},\quad P_i, i=1,2,\cdots,N\right\},$$

1）获国家自然科学基金资助.
收稿日期：1993-11-10

其中 w_i 为 Lipschitz 的,$P_i>0(i=1,2,\cdots,N)$且满足 $\sum_{i=1}^{N}P_i=1$.

目前这种方法已较广泛地用于分形的表示及图象的编码中[3],然而它依然存在着不少问题,比如:编码时 w_i 的个数没有一个标准,编码的效果完全取决于人的经验. 本文试图从另一个新的角度去描述分形,即数学形态学的分形编码.

2　数学形态学的变换、推广及其分形编码

数学形态学是一门较新的学科,1964—1968年间由法国的 G. Matheron 及 J. Serra 提出,它建立在积分几何及随机集论上,积分几何能够反映出图形的结构、形态上的性质,可以得到各种几何参量的间接测量,而图象中的随机性质(如灰度分布等)的处理则以随机集论为基础. J. Serra 等人在形态学中设计了一整套的变换、概念及算法,主要用于描述图象中的基本结构特征,对物体的各个元素或者各部分之间形态关系表现出来的形状、纹理等几何特征有着独特的效果[4]. 这显然与分形有着某种内在的联系. 数学形态学中最基本的变换有如下两种:

腐蚀.　集合 A 被结构元素 B 腐蚀,又称闵可夫斯基减,记为

$$A\ominus B=\{p\mid\forall_{b_i\in B}\ \exists_{a_j\in A}\ p=a_j-b_i\},$$

p 是 $A\ominus B$ 中的点,即将结构元素 B 用 p 平移后应当包含在 A 中.

膨胀.　又称闵可夫斯基加

$$A\oplus B=\{p\mid\exists_{b_i\in B}\ \exists_{a_j\in A}\ p=a_j+b_i\}.$$

由这两种最基本运算可以组成形态学中的另五种基本运算:开、闭、薄化、厚化、即离. 由此产生了在图象分析中的各种应用[5]. 数学形态学最大的贡献应该说是在几何变换中引入了"形态滤波器"——"结构元素"的概念. 然而在通常的应用中,结构元素是预设的,在整个过程中一般是不变的,即结构元中各点相对位置是确定的,它表现在两点:一是"大小"不变,即无尺度变化;二是无方向变化,这无疑又限制了形态学的进一步应用. 下面把它推广到一个多级变尺度的迭代过程.

拼花定理表明:一个分形可看成由其自身的几个较小的映象(自相似或自仿射变换下的"拷贝")组成,每个映象又由更多更小的映象拼成,相应的多级膨胀应达到这样一个目的:从某种"原子"出发,按照一定的规则把几个"原子"拼成一个"分子",把几个"分子"按照同一或相似的规则拼成一个"分子团",……,最终得到一块较大的"物质",形成可见的分形. 在这里,"原子"就是结构元素,它的大小可变,方向可变,并由拼接过程(即多级膨胀)的级数决定,记为 B_i,若以 A 为吸引子,则 A 可表示为

$$A=B_0\oplus[\bigoplus_{i=1}^{N}B_i]. \tag{1}$$

N 表拼接的总级数,与分形大小及显示分辨率有关. 这样把 B_0,B_i 作为某种分形的编码是合适的,由分形的性质知道 B_i 是与拼接级数有关,如果记录每个 B_i 是不经济的,实际上在拼接的每一级中规则是相似的,或可按某一显式的规律由上一级给出,此时 $B_{i+1}=f(B_i)$,可以看到不同的 f 可以生成各种各样的分形. 因此(1)式同样是分形的一个描述方法. 下面,给出自相似这一大类分形的形态学表示及其编码的方法. 在这类经典的分

形中，每个 B_i 之间仅是尺度的变化，设比例为 r，则 $B_{i+1}=B_i r^{i-1}$. (1) 式可写成

$$A = B_0 \oplus [\bigoplus_{i=1}^{N}(B \cdot r^{i-1})]. \tag{2}$$

把 B_0，B，r 三者作为分形的编码存储起来. 称之为形态学码，B_0 为某一设定的起始点，而由于分形的位移不变性，这一点的实际位置无关紧要，实际上只记录 B 和 r 即可.

如何从给定的分形来寻求这种编码，在 IFS 中要寻找每个与总体自相似的部分，这一定要求人的参与. 此处也存在类似的困难，但是要寻找的是能够反映分形最本质结构特征的"原子"，这可以从分形的骨架或关节点的分布上得到启发，它使得人参与的过程更为简单，同时也给自动寻求编码提供了可能：以分形的外包络为界填充分形，然后通过求骨架或关节点即可容易地得到所需的"原子".

下面以 Sierpinski 三角为例，说明形态学码的一般步骤：

1）填充分形，如图1所示.

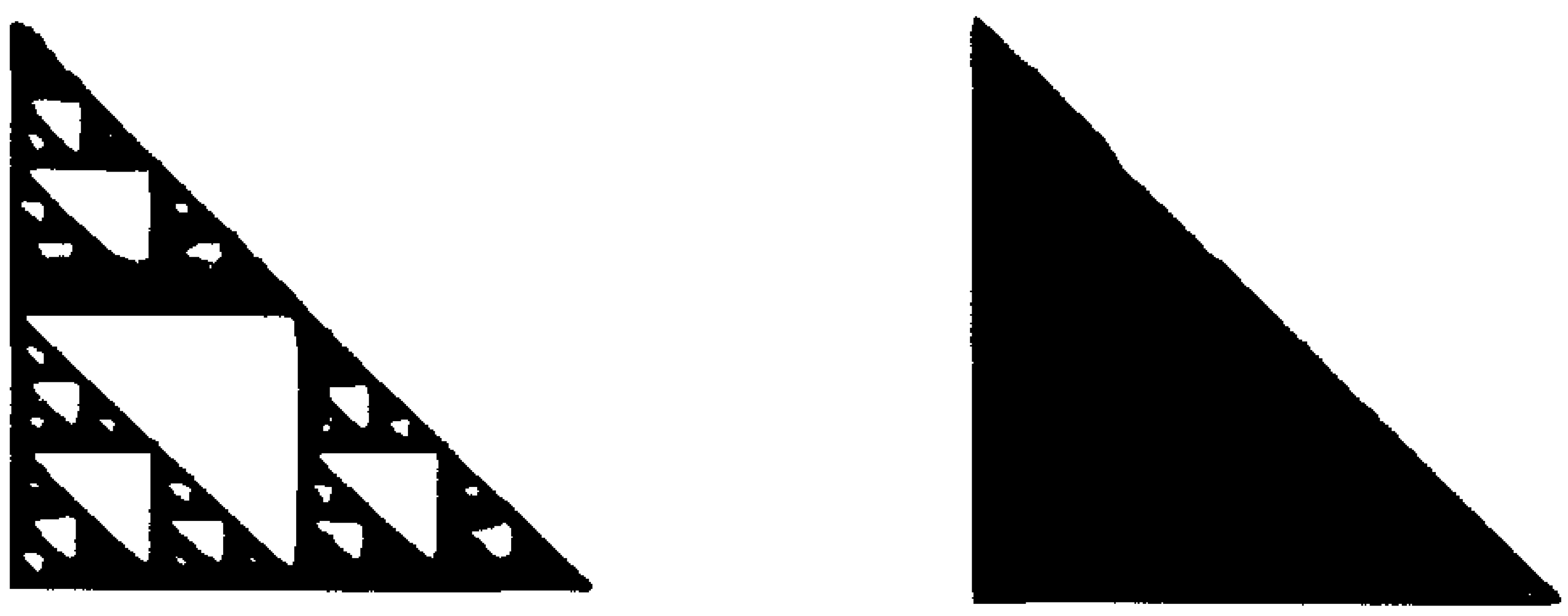
2）求骨架. 这个过程仍然可以借助于形态学中的方法，求集合 X 的骨架[5] $S(X)$ 如下：

$$S(X)=\bigcup_n S_n(X), \quad n=1,2,\cdots,N.$$

$$S_n(X) = (X \ominus nH)/[(X \ominus nH) \cdot H].$$

其中 $A \cdot B=(A \ominus B) \oplus B$,

$N=\max\{n \mid X \ominus nH \neq 0, n=1,2,\cdots\}$.



(a) Sirepinski 三角 (b) 填充后的图形

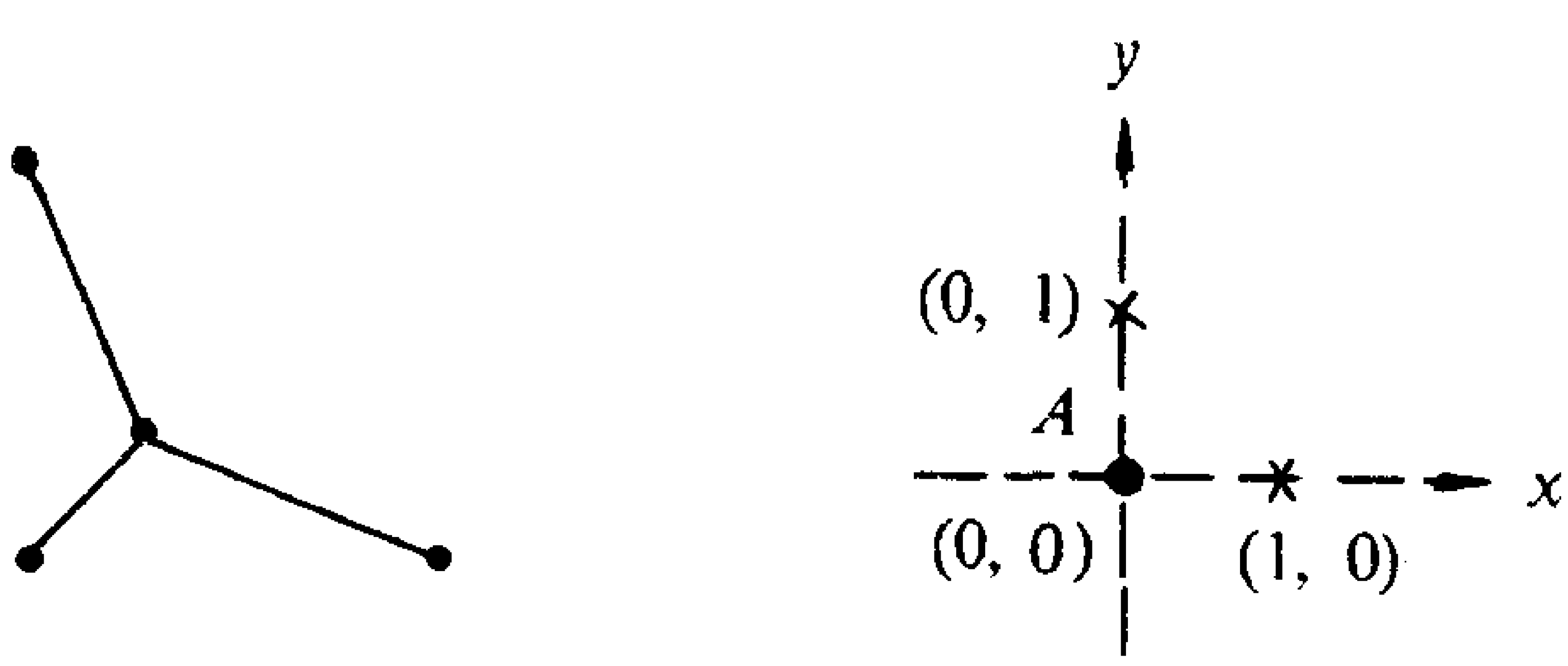
图 1

J. Serra 对结构元素 H 提出过六角栅下的 Golay 表，中科院智能所提出了方格栅下的 Golay 表，同时研制的图象 PLIS 系统，可以实时实现骨架的提取[1)]

对填充 sierpinski 三角提出骨架如图2(a).

3）求结构元素 B 及 r

因为是多级尺度的迭代，结构元素可变大小，所以只记录端点成为结构元素中的点，同时检查这些点是否在原分形集上，若否，则去除. 可任选一点为结构原点，它只决定了分形生长的方向，此处以 A 为原点，结构元素如图2(b)所示，r 实际上是分形中自相似的比例，它可以由结构元素过原点在一方向上的点数获得，本例中 $r=1/2$，若分形在该方向上的大小为 $l=256$，分辨力最小单位为1，则 N 应满足：



(a) (b)

(a) 填充图形的骨架 (b) 结构元素 B

图 2

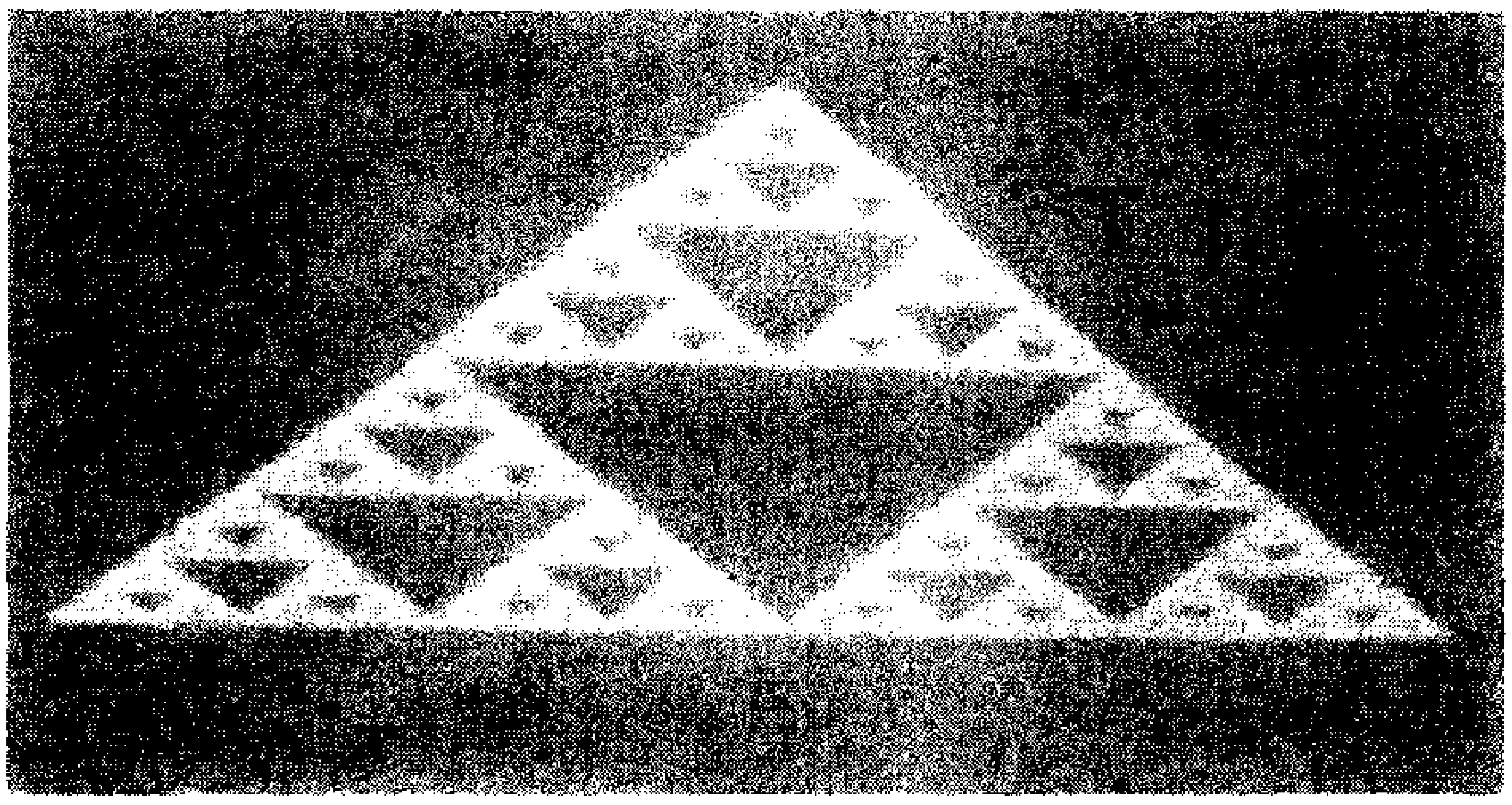
$$\mathrm{int}[l \times r^N] = 1 \Rightarrow \mathrm{int}\left[256 \times \left(\frac{1}{2}\right)^N\right] = 1 \Rightarrow N = 8.$$

1) 黄李本，李惠超，韦穗等. 基于数学形态学图象分析算法及其实时实现方法研究报告. 中国科学院合肥智能所. 1989.

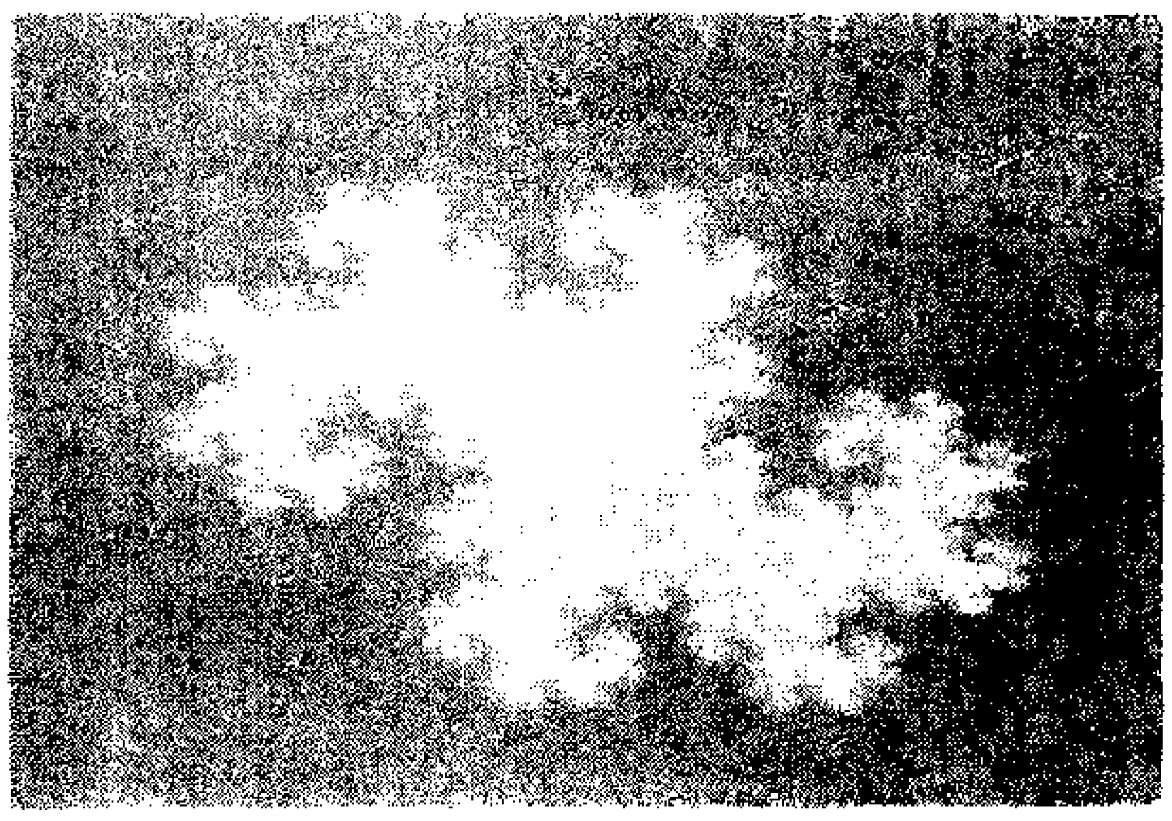
即在生成时只要迭代8次就可完成分形的重构.

3　实验及讨论

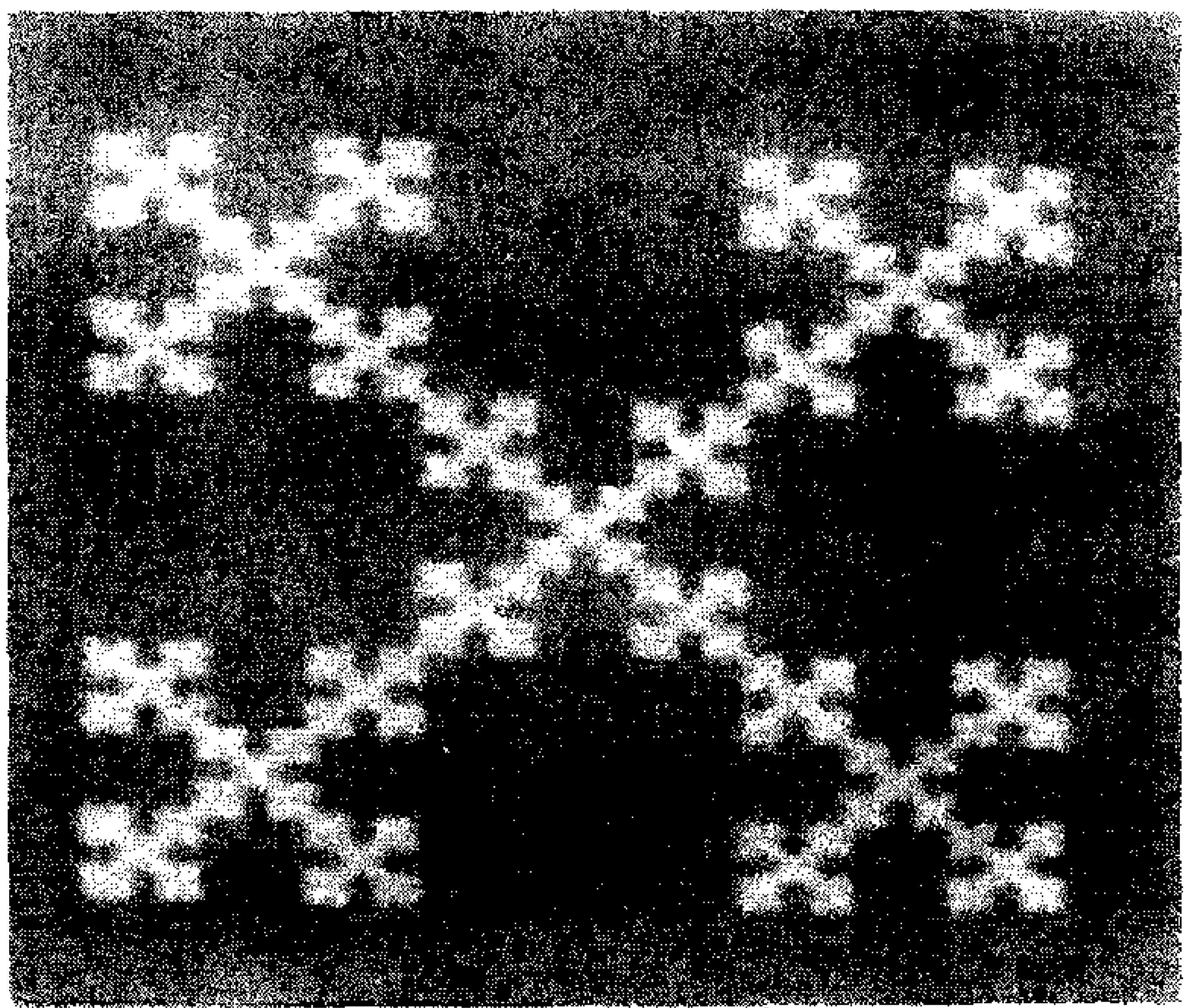
对几种典型分形进行了形态学编码的求取及再生成,如图3所示.



(a)　Sirepinski 三角



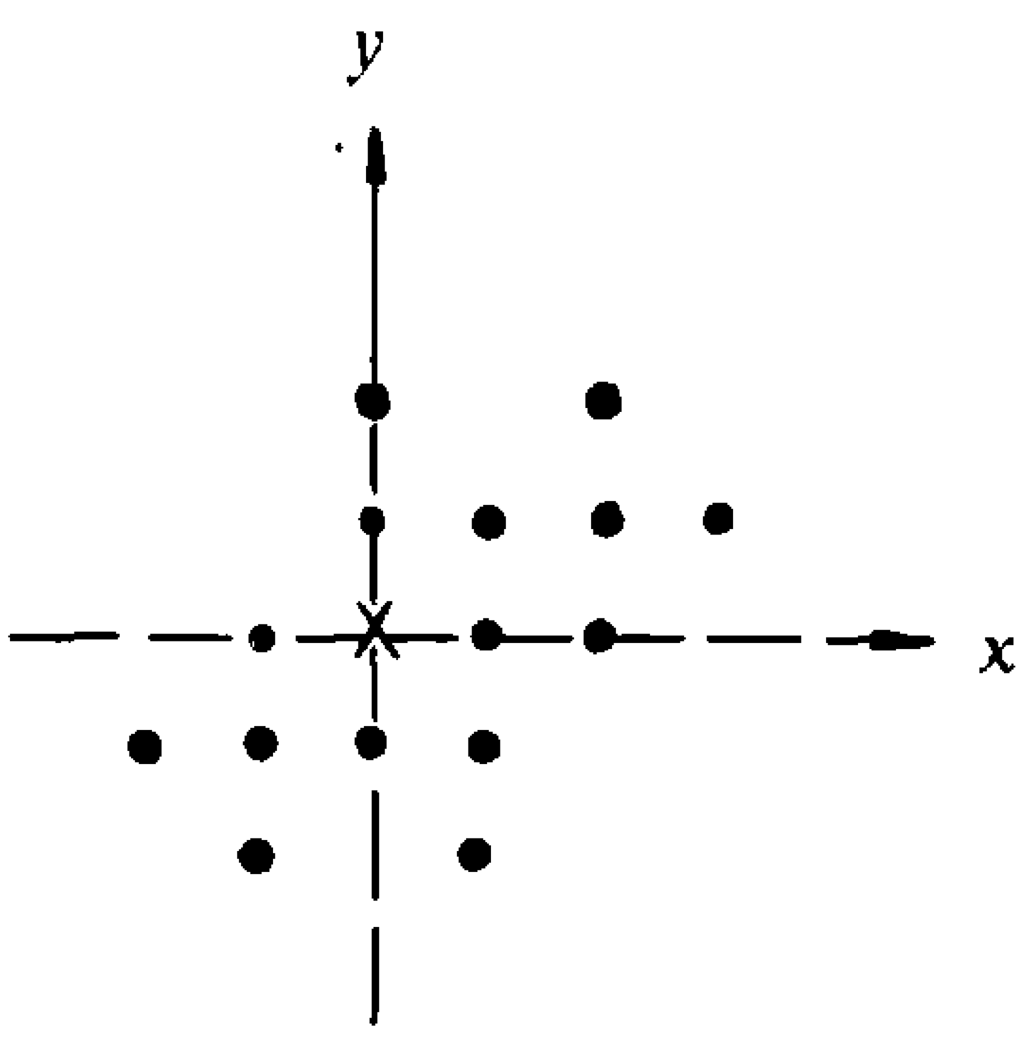
(b)　Double dragon, $r=\frac{1}{4}$



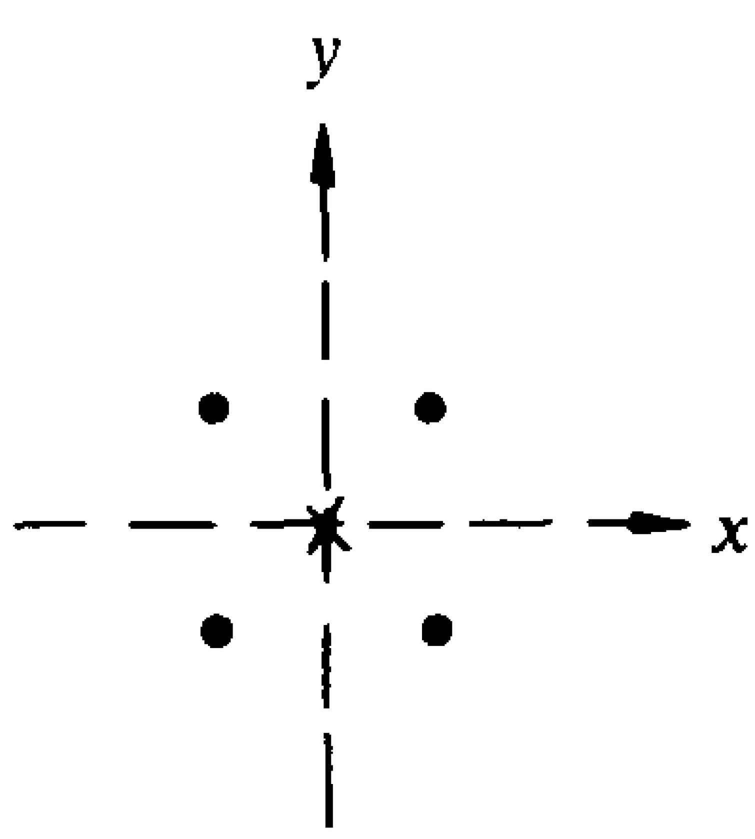
(c)　4-tree, $r=\frac{1}{3}$

图 3

其中图(b),(c)的结构元素如图4.



(a)　Double dragon 的结构元素.



(b)　4-tree 的结构元素.

图 4

与这些分形的传统 IFS 编码的比较见表1.

表 1

	Sırepınskı 三角	double dragon	4-tree
IFS 编码量	21个浮点数	14个浮点数	35个浮点数
形态学编码量	7个整数	33个整型数	11个整型数

可以看到形态学的方法效果较好,其运算具有很好的并行性,一是有一些硬件环境(如 PLIS 系统)可以对帧内所有象素点同时膨胀;一是对每一点一次膨胀可以同时产生数点,这比 IFS 系统有更快的吸引子收敛速度,表现在 N 较小时. 对分形的 IFS 码至今尚无有效的提取方法,它可能造成的是一个分形的数次编码间相差甚远,而在形态学方法中由于骨架法的引入使得计算机有可能自动形成编码或者至少可以给实验者以极大的启发,由于结构元素可以很简单地推广到三维空间中,迭代过程相对简单,所以有一定的优越性.

4 结语

分形理论已得到了广泛的重视及应用,然而在组织结构的定量化描述上依然存在不少困难,这个问题的解决要依靠于数学上的深入研究,同时也应与各学科,多种方法有机结合. 本文从数学形态学的角度提出了一条新的思路,既有助于分形理论的研究及应用,例如,用数学形态学还可以对灰值图象的分数维进行快速准确的提取等,也有助于数学形态学自身的理解和发展. 有待于进一步的研究工作是,在分形的描述中,单结构元多方向性,多结构元素的组合使用,可以表达更多更复杂的分形形态. 在对三维空间及其在成像后的灰值图象的形态学描述,尤其对具有分形性质的分子结构,晶体生长模型中还有很大的研究及应用领域.

参 考 文 献

[1] Barnsley M F, Demko S Iterated, functıon systems and global constructruction of fractals. In: Proc. R Soc. Lond, 1985, A399: 243—275.

[2] Barnsley MF. Fractals Everywhere, Academic Press, 1988.

[3] Barnsley MF, Sloan AD. A better way to compress lmages. *Byte*, 1988, **13**(2):215—222.

[4] Kteın JC, Serra J. The texture analyzer. *J. Microseopy Apri* 1972, **95**(2):349—356.

[5] 唐常青,吕宏伯,黄铮等. 数学形态学方法及其应用. 北京:科学出版社,1990.

FRACTAL CODING BASED ON MATHEMATICAL MORPHOLOGY

CAO LEI
(*Dept. of Electronics Engineering, University of Science & Technology of China, Hefei* 230026)

WER SUI　KONG BIN
(*Institute of Intelligent Machines, The Chinese Academy of Sciences, Hefei* 230031)

Abstract　Based on fundamental properties of fractals, the authors generalize the basic opperations (e.g., dilatation) to a multiple vector iterative procedure with variable scale with this generalization, a new fractal coding method is proposed. In this me thod, the morphological structure element B and scale changing rate r are used as the fractal information. Experiment results of this coding method and the comparison with traditional fractal coding with iterative function system (IFS) are given.

Kye words　Fractal, mathematical morphology, vector iteration of multiscales, encoding.

曹　磊　生于1968年10月,1990年毕业于合肥工业大学电气工程系,1993年于中国科学技术大学计算机科学系获硕士学位,现在中国科技大学电子技术部CAD教研室任教,研究方向为:图象压缩、分形理论以及人工神经网络等.

韦　穗　生于1946年2月,1969年毕业于南京工学院(东南大学)电子工程系. 现为中科院合肥智能所研究员,研究方向为:视觉科学技术以及工程应用.