

CMAC 学习过程收敛性的研究

罗 忠

(中国科学院遥感所图象室 北京 100101)

谢永斌

(西安工业学院电子系 西安 710032)

朱重光

(中国科学院遥感所图象室 北京 100101)

摘 要 基于 CMAC 学习过程等价于求解线性方程组的 Gauss-Seidel 迭代这一事实, 研究了学习过程的收敛性. 利用矩阵分析方法, 估计出了收敛的速度. 考虑了作为节省存储空间措施的 hash 编码的不利影响——破坏了收敛性态. 从理论上分析了其存在的原因.

关键词 CMAC, 收敛性, Gauss-Seidel 迭代, hash 编码.

1 引言

CMAC 即小脑模型关节控制器是 Albus 于 1975 年首次提出的一种人工神经网络^[1,2]. CMAC 具有线性结构, 学习算法简单, 有输入泛化能力. 已成功应用于机器人控制^[3]、模糊控制^[4]、非线性时间序列分析^[5]等领域. CMAC 一般结构如图 1 所示.

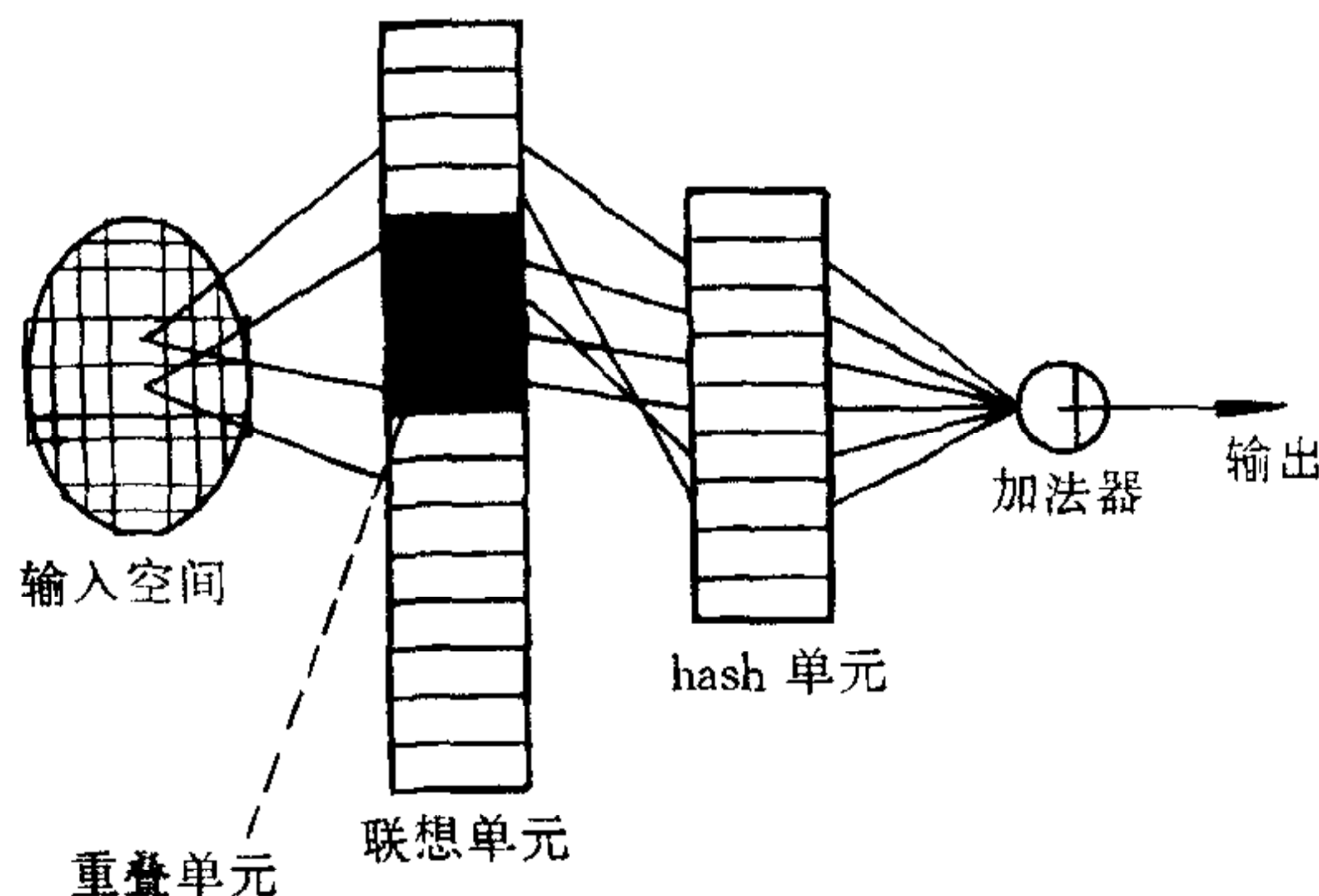


图 1 CMAC 的一般结构

设 CMAC 输入空间为 $X \subset \mathbb{R}^d$, X_d 为对应的离散输入空间. 联想单元中的量称联想强度. 输入激活一组 A^* 个联想强度, 它们的代数和即为对应之输出. 即若 $x_k \in X_d$, 其激活的联想强度为 $w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \dots, w_{A^*}^{(k)}$, 则输出为

$$y_k = \sum_{j=1}^{A^*} w_j^{(k)}. \quad (1)$$

d_k 为期望输出, 学习误差 $d_k - y_k$ 用以更新上述 A^* 个联想强度.

$$w_j^{(k)} = w_j^{(k-1)} + \frac{1}{A^*} (d_k - y_k), \quad 1 \leq j \leq A^*. \quad (2)$$

显然联想单元数在大输入空间情况下是巨大的. 为节省存储空间. Albus 提出了 hash 编码. 即联想强度存于一组数量大大少于联想单元的所谓 hash 单元中, 联想单元只存 hash 单元的散列地址编码.

2 CMAC 学习过程的实质

X_d 的一个子集 X_t 称为训练集, 训练样本均取自 X_t . 学习过程由多个周期构成. 每一周期内, 按一定顺序用 X_t 中样本训练网络. 若均方学习误差小于误差界, 学习结束. 为叙述简单起见, 本文只讨论一维输入情形.

设 $X_d = \left\{ a + \frac{k}{N-1} (b-a) \mid a, b \in \mathbb{R}, b > a, 0 \leq k \leq N-1 \right\}$. $x_k = a + \frac{k}{N-1} (b-a)$ 激活的联想强度为 $w_{k+1}, \dots, w_{R+A^*}$, 联想强度总数为 $M = N + A^* - 1$. 令 $I = \{i \mid 0 \leq i \leq N-1, i \in \mathbb{Z}\}$, $S = \{s \mid 1 \leq s \leq M, s \in \mathbb{Z}\}$, $\theta: I \times S \rightarrow \{0, 1\}$.

$$\theta(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{若 } x_n \in X_d \text{ 激活 } w_m, \\ 0 & \text{其它.} \end{cases} \quad (3)$$

设 $|X_t| = Nt$, 令 $I_t = \{i \mid 0 \leq i \leq Nt-1, i \in \mathbb{Z}\}$ 和 $\theta_t: I_t \times S \rightarrow \{0, 1\}$.

$$\theta_t(k, m) = \begin{cases} 1 & \text{若 } x_{n_k} \in X_t \text{ 激活 } w_m, \\ 0 & \text{其它,} \end{cases} \quad (4)$$

$$e_n(k) = \frac{1}{A^*} (d_n - y_n(k)), \quad n \in I_t, \quad (5)$$

$$E_n(k) = \sum_{j=0}^k e_n(j), \quad n \in I_t. \quad (6)$$

$$D = [d_0, d_1, \dots, d_{Nt-1}]^T, \quad (7)$$

$$W = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T, \quad (8)$$

$$E(k) = [E_0(k), E_1(k), \dots, E_{Nt-1}(k)]^T, \quad (9)$$

$$A = [\theta_t(i, j)]_{Nt \times M}, \quad i \in I_t, \quad j \in S, \quad (10)$$

$$C = AA^T, \quad (11)$$

$$C_0 = \left[\sum_{m=1}^M \theta(i, m) \theta(j, m) \right]_{N \times N}, \quad i, j \in I. \quad (12)$$

L, R 为 C 的下三角(含对角元)和上三角(不含对角元)部分.

CMAC 学习目的在于求解线性方程组

$$AW = D \quad (13)$$

因 $Nt \leq N < M$, (13) 为不定方程组. Wong 和 Sideris 证明了 CMAC 学习过程等价于求解下述线性方程组的 Gauss-Seidel 迭代^[6].

$$CE = D, \quad (14)$$

$$\text{即 } LE(k) = D - RE(k-1). \quad (15)$$

一个学习周期对应一次迭代. 若迭代收敛, 即 $W(\infty)$ 和 $E(\infty)$ 存在, 则

$$W(\infty) = A^T E(\infty) = A^T (AA^T)^{-1} D \quad (16)$$

这正是(13)的最小范数 LS 解^[7].

3 收敛性分析一些结论

定理 1. 矩阵 A 为满秩矩阵.

证明略.

定理 2. 矩阵 C 是正定对称矩阵.

证明. 对称性为显然. 因 A 满秩, 其所有奇异值均为正, 故 C 所有特征值均为正. 故 C 是正定阵. 证毕.

定理 3. 设 R 为 $n \times n$ 实对称正定矩阵, Q 为任一 $n \times n$ 非奇异实矩阵, 且 $Q + Q^T - R$ 为正定阵, 则 $-Q^{-1}(R - Q)$ 之全部特征值位于圆 $G: |z - (1 - \frac{1}{r})| = \frac{1}{r}$ 内部及除点 $(1, 0)$ 外之圆周上. 其中

$$r = \min_{\substack{u \in R^n \\ \|u\|_2=1}} \frac{\langle Qu, u \rangle + \langle Q^T u, u \rangle}{\langle Ru, u \rangle}$$

$\langle \rangle$ 为向量内积符号.

证明. $Q + Q^T - R$ 正定, 故对 $\forall u \neq 0, u \in R^n$ 有

$$\langle (Q + Q^T - R)u, u \rangle = \langle Qu, u \rangle + \langle Q^T u, u \rangle - \langle Ru, u \rangle > 0,$$

于是 $r > 1$. 设 λ 为 $-Q^{-1}(R - Q)$ 之任一特征值, v 为对应之单位长度特征向量, 则

$$-Q^{-1}(R - Q)v = \lambda v,$$

即

$$(1 - \lambda)Qv = Rv,$$

故

$$(1 - \lambda)\langle Qv, v \rangle = \langle Rv, v \rangle,$$

据 Hilbert 空间上内积性质有

$$(1 - \bar{\lambda})\langle Q^T v, v \rangle = \langle Rv, v \rangle,$$

令 $\lambda = \alpha + j\beta$, 则

$$\langle Qv, v \rangle + \langle Q^T v, v \rangle = \left(\frac{1}{1 - \lambda} + \frac{1}{1 - \bar{\lambda}} \right) \langle Rv, v \rangle,$$

即

$$\langle Qv, v \rangle + \langle Q^T v, v \rangle = \frac{2(1 - \alpha)}{(1 - \alpha)^2 + \beta^2} \langle Rv, v \rangle.$$

显然

$$\frac{2(1 - \alpha)}{(1 - \alpha)^2 + \beta^2} \geq r \quad \text{且} \quad \alpha < 1,$$

即

$$\left[\alpha - \left(1 - \frac{1}{r} \right) \right]^2 + \beta^2 \leq \frac{1}{r^2 + 2}, \alpha < 1.$$

写成复数模的形式为 $|\lambda - (1 - \frac{1}{r})| \leq \frac{1}{r}, \text{Re}(\lambda) < 1$. 证毕.

因 $L + L^T - C = A^* I$ 正定. 由定理 3 知 $-L^{-1}R$ 的全部特征值位于圆 G 内部和除

(1,0)点以外的圆周上. 圆 G 的半径小于 1, 与单位圆切于(1,0)点, 它的其余部分位于单位圆内. 于是 $-L^{-1}R$ 全部特征值位于单位圆内. 故由[8]可知迭代

$$E(k) = -L^{-1}RE(k-1) + L^{-1}D \quad (17)$$

是收敛的. 从而由等价性知, CMAC 学习过程收敛. 以上结论是在无 hash 编码条件下得到的. 下节讨论有 hash 编码的情形.

引理 1. 定理 3 中以 C, L 代替 R, Q , 则有 $r = 1 + \frac{A^*}{\lambda_{\max}(C)}$, 其中 $\lambda_{\max}(C) = \max \lambda(C)$. $\lambda(C)$ 表示 C 的特征值集合.

证明.

$$\begin{aligned} r &= 1 + \min_{\substack{u \in \mathbb{R}^{N_t} \\ \|u\|_2=1}} \frac{\langle Lu, u \rangle + \langle L^T u, u \rangle - \langle Cu, u \rangle}{\langle Cu, u \rangle} \\ &= 1 + \min_{\substack{u \in \mathbb{R}^{N_t} \\ \|u\|_2=1}} \frac{A^* \|u\|_2^2}{\langle Cu, u \rangle} = 1 + \frac{A^*}{\lambda_{\max}(C)}. \quad \text{证毕.} \end{aligned}$$

定理 4. $L^{-1}R$ 的特征值的最小模不小于

$$m = \max \left(0, 1 - \frac{2\lambda_{\max}(C)}{\lambda_{\max}(C) + A^*} \right).$$

证明. 以 \bar{G} 表示集合 $\{z \mid z - (1 - \frac{1}{r}) \mid \leq \frac{1}{r} \operatorname{Re}(z) < 1\}$, 则 $-L^{-1}R$ 的特征值全在 \bar{G} 内. 我们只需证明 $m = \min_{z \in \bar{G}} |z|$. 若 $(0,0) \in \bar{G}$, 显然 $\min_{z \in \bar{G}} |z| = 0$. 此时作为 \bar{G} 的边界与实轴交点横坐标(与 1 相对)的 $1 - \frac{2}{r} = 1 - \frac{2\lambda_{\max}(C)}{\lambda_{\max}(C) + A^*}$ 显然为负, 所以 $m = 0$, 即 $m = \min_{z \in \bar{G}} |z|$. 若 $(0,0) \notin \bar{G}$, 则由对称性知, \bar{G} 中模最小的点一定是其边界与实轴的交点. 从而 $\min_{z \in \bar{G}} |z| = 1 - \frac{2\lambda_{\max}(C)}{\lambda_{\max}(C) + A^*}$. 而此时 $1 - \frac{2\lambda_{\max}(C)}{\lambda_{\max}(C) + A^*} > 0$, 故 $m = 1 - \frac{2\lambda_{\max}(C)}{\lambda_{\max}(C) + A^*}$, 即 $m = \min_{z \in \bar{G}} |z|$. 综上所述, 恒有 $m = \min_{z \in \bar{G}} |z|$. 证毕.

CMAC 学习的收敛速度与迭代(17)式相同. 后者取决于 $-L^{-1}R$ 的特征值. 据定理 4 知, $-L^{-1}R$ 的特征值最小模可能为 0. 说明其特征值中有许多具有较小的模. 有利于收敛.

引理 2. (包含原理)^[8] 设 R 为 $n \times n$ Hermite 阵, $n > m$. R_1 为 R 前 $n-m$ 行与前 $n-m$ 列相交成的子阵. 设 R 的特征值为 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$, R_1 的特征值为 $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_{n-m}$, 则

$$\alpha_i \geq \beta_i \geq \alpha_{i+m}, \quad 1 \leq i \leq n-m.$$

定理 5. 设 $\lambda_{\max}(C_0) = \max \lambda(C_0)$, 则

$$\lambda_{\max}(C_0) \geq \lambda_{\max}(C).$$

证明. C 是由 C_0 的标号为 n_1, n_2, \dots, n_{N_t} 的 N_t 行和 N_t 列相交成的子阵. 则存在行置换阵 P 使 C 是 \tilde{C}_0 的前 N_t 行和 N_t 列相交而成的子阵, 其中 $\tilde{C}_0 = PC_0P^T$. 因 P 是正交阵, 故 $\lambda(\tilde{C}_0) = \lambda(C_0)$, 所以 $\lambda_{\max}(C_0) = \lambda_{\max}(\tilde{C}_0) \geq \lambda_{\max}(C)$. 证毕.

以上定理说明采用全部输入点作为训练样本, 可达到最快的收敛速度.

4 hash 编码对收敛性的影响

hash 编码的一个致命弱点是会引起所谓碰撞^[1], 即多个联想单元同时指向同一个

hash 单元. 当前者总数大于后者总数时, 碰撞是不可避免的.

一旦发生碰撞, CMAC 学习的收敛性会受到三种可能的影响.

首先 A 可能失去满秩性质. 请看下例. 设 $N_t=3, M=5, A^*=3$, 联想单元数亦为 5. 引入 hash 编码前,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

假定碰撞使得联想单元 1, 4 均指向 hash 单元 1, 从而 A 和 C 变成

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

A 不满秩. 后果是

$$-L^{-1}R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix},$$

显然学习不收敛.

其次, 即便学习仍收敛, 碰撞会降低收敛速度. 碰撞使 A 各行线性相关程度增大, 从而使 A 的最大奇异值减小, 即使得 $\lambda_{\max}(C)$ 减小. 从而使收敛速度降低.

其三, 在一个学习周期内, 碰撞使得后面的训练样本干扰前面训练样本的学习效果. 从而使均方误差随学习次数变化的曲线起伏振荡, 收敛性态变坏.

5 仿真结果

前面的分析结论完全适用于多维输入情形. 只不过证明形式更复杂. 下面用一个二维输入例子来验证我们的理论. 任务为学习以下函数.

$$f(x, y) = \sin 2\pi x \cdot \sin 2\pi y, \quad (x, y) \in [0, 1]^2.$$

离散化得

$$f_d(i, j) = \sin\left(2\pi \cdot \frac{i}{30}\right) \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{j}{30}\right), \quad 0 \leq i, j \leq 30.$$

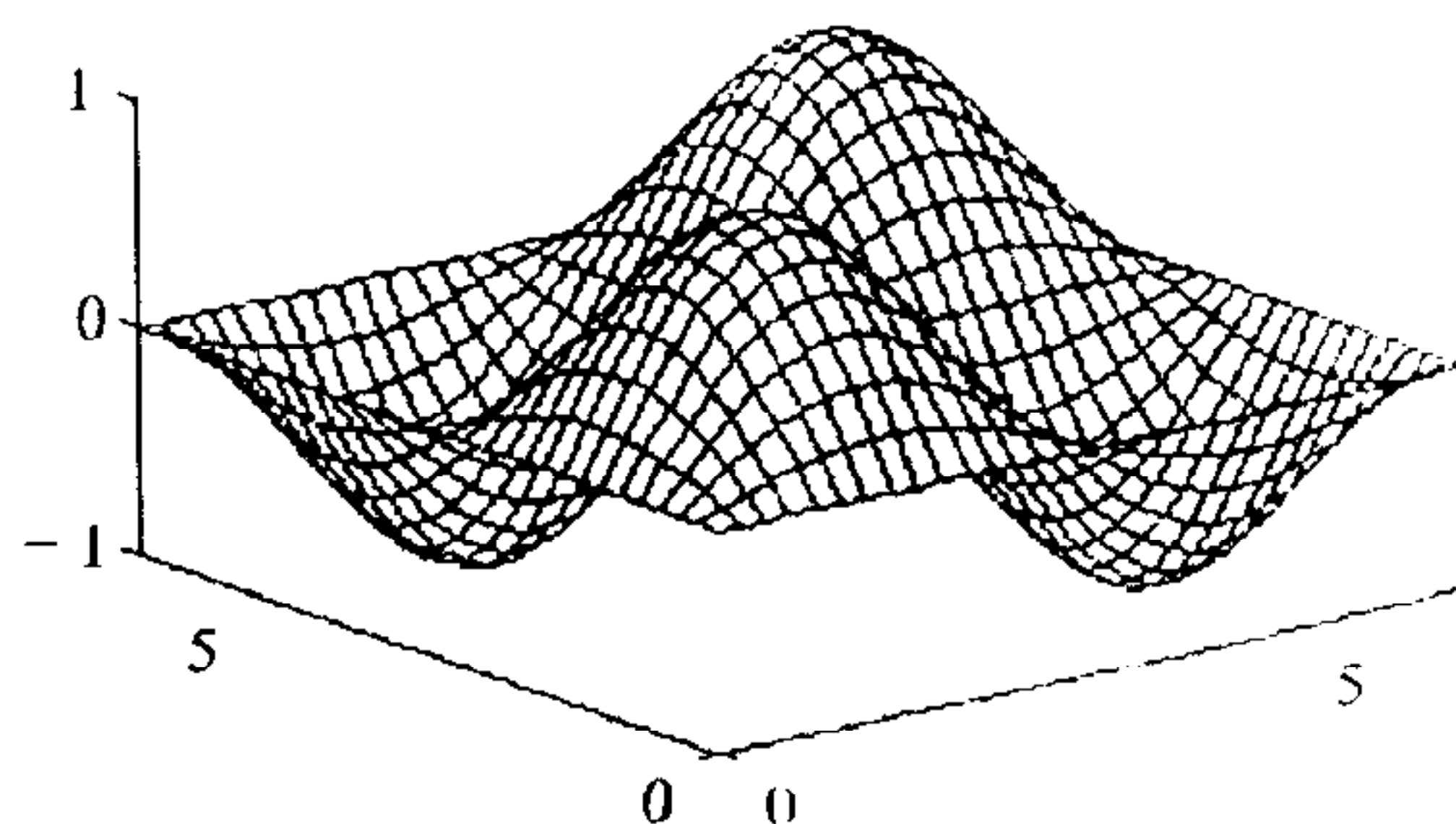


图 2 $f(x, y)$ 的图象

取 $X_i = \{(5k, 5l) | 0 \leq k, l \leq 6\}$, $A^* = 10$. 仿真结果如图 2、图 3 和图 4 所示.

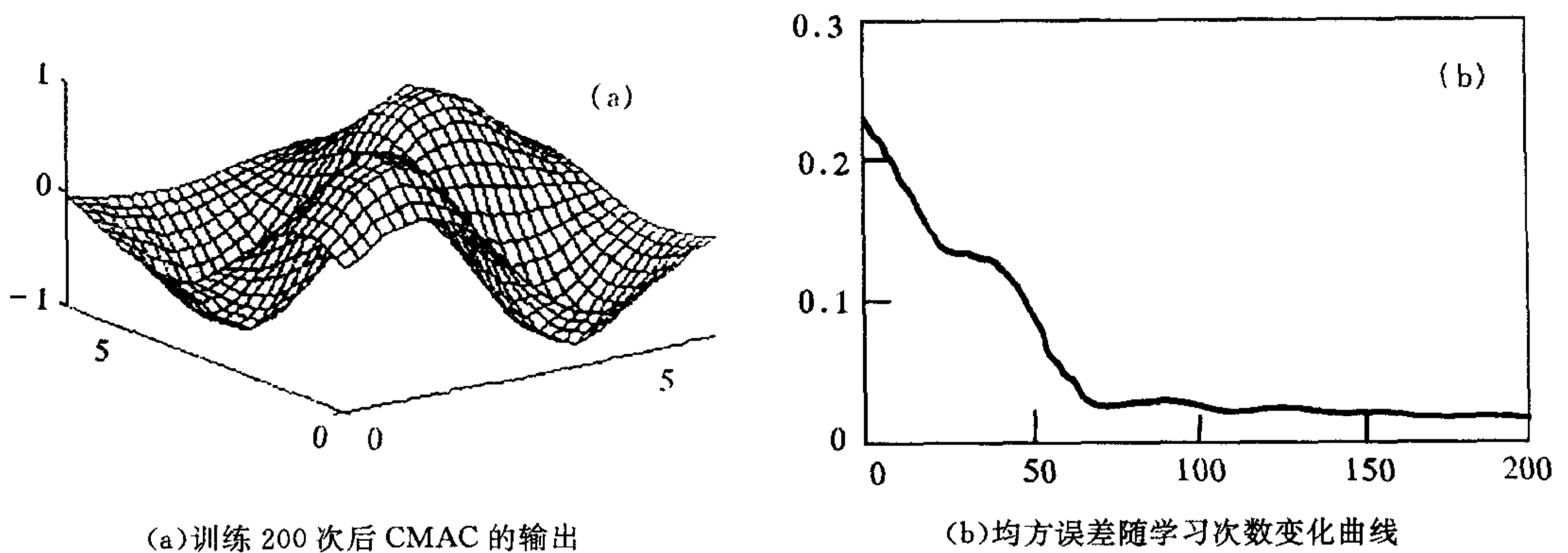


图 3 CMAC 学习仿真结果(无 hash)编码

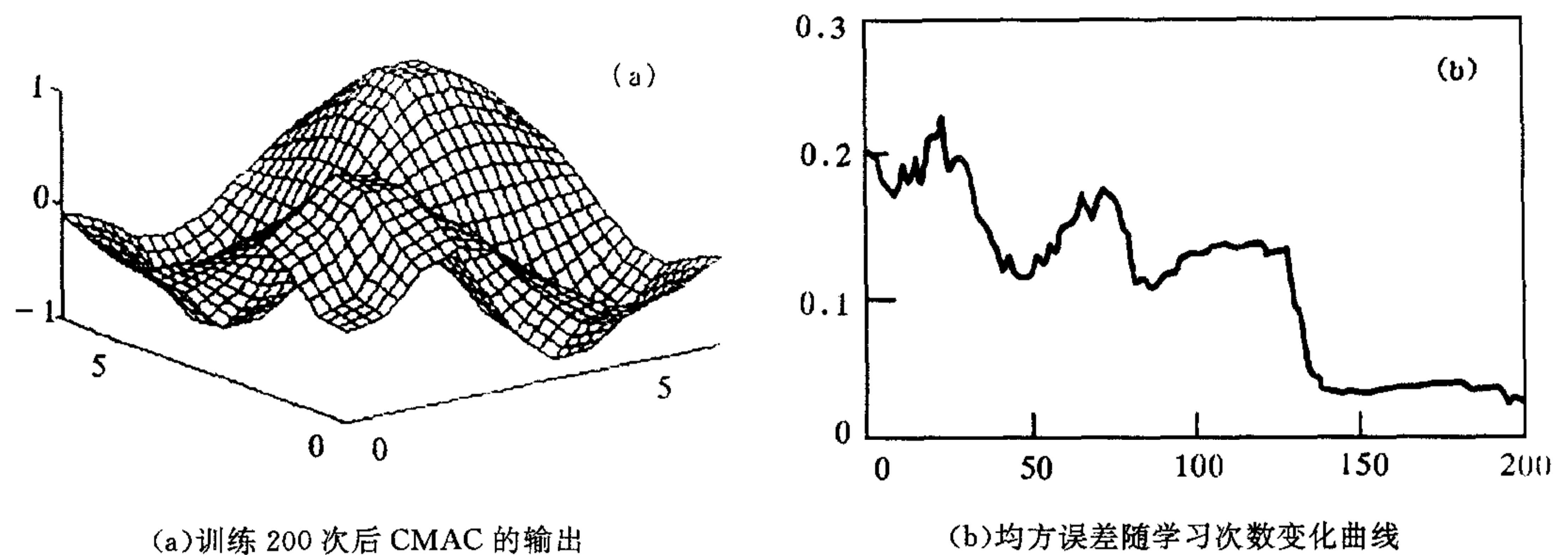


图 4 CMAC 学习仿真结果(有 hash)编码

5 结论

通过理论分析和仿真实验,结论如下.

- (1) 无 hash 编码的 CMAC 学习过程必收敛.
- (2) 有 hash 编码的 CMAC 学习过程收敛性受碰撞影响后有 3 种可能结果: 1) 不收敛, 2) 收敛变慢, 3) 收敛性态变坏.

参 考 文 献

- [1] Albus J S. A new approach to manipulator control: The cerebellar model articulation. Controller(CMAC). *Trans of ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, 1975, **9**: 220—227.
- [2] Albus J S. Data Storage in the Cerebellar Model Articulation Controller(CMAC). *Trans of ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1975, **9**: 228—233.
- [3] Miller W T. Real-time Application of Neural Networks for Sensor-based Control of Robots. with Vision, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, 1989, **19**: 825—831.
- [4] Nie J Linkens D A. FCMAC: A Fuzzified Cerebellar Model Articulation Controller with Self-organizing Capacity, *Automatica*, 1994, **30**(4): 655—664.
- [5] Touretzky D S. Ed. *Neural Information Processing Systems 1*, Los Altos, CA: Morgan Kaufmann, 1989. 29—39.

- [6] Wong Y F, Sideris A. learning convergence in the cerebellar model articulation controller. *IEEE Trans. Neural Networks*, 1992, 3(1): 115—120.
- [7] Franklin J S. Matrix theory. Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall, Inc. , 1968. 261—268.
- [8] 徐成贤, 徐宗本编著. 矩阵分析. 西安: 西北工业大学出版社, 1991. 24—65.

A STUDY OF THE CONVERGENCE OF THE CMAC LEARNING PROCESS

LUO ZHONG

(Dept. Image Processing, IRSA, CAS, P. O. Box 9718, Beijing 100101)

XIE YONBIN

(Dept. Automatic Control, School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

ZHU CHONGGUANG

(Dept. Image Processing, IRSA, CAS, P. O. Box 9781, Beijing 100084)

Abstract Based on the fact that the CMAC learning process is equivalent to the Gauss-Seidel iteration for solving a linear system of equations, this paper addresses the convergence of the CMAC learning process. By means of matrix analysis, the convergence speed is estimated. The negative effect on convergence of hash coding, i. e. , it deteriorates the convergence performance is considered and the reason for its existence is also theoretically analyzed.

Key words CMAC, convergence, Gauss-Seidel iteration, hash coding.

罗 忠 男 1969年1月生, 1996年于西安交通大学获自动控制理论及应用专业博士学位. 现在中国科学院遥感所进行博士后研究. 研究领域为: 控制理论、信号处理、图象处理、神经网络. 已发表论文 10 余篇.