第 23 卷 第 3 期 自 动 化 学 报 Vol. 23, No. 3
1997 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1997

研究简报

不确定噪声下确保连续 LQG 最优控制目标的扰动界

奚宏生 杨孝先
（中国科学技术大学自动化系 合肥 230027）

关键词 鲁棒 LQG 最优控制，确保控制目标，扰动界

1 引言

具有不确定噪声的随机线性控制系统为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w^{\circ}(t) \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t) + v^{\circ}(t) \tag{2}$$

其中 $x(t)\in \boldsymbol{R}^n, y(t)\in \boldsymbol{R}^r, u(t)\in \boldsymbol{R}^m, w^{\circ}(t)$和 $v^{\circ}(t)$分别是零均值、相互独立的 n 维和 r 维高斯白噪声过程. 它们的不确定性表现在其协方差矩阵满足

$$\mathrm{cov}[w^{\circ}(t), w^{\circ}(s)] = W^{\circ}\delta(t-s) = (W+\Delta W)\delta(t-s), \quad W \geqslant 0, \quad \Delta W \geqslant 0;$$

$$\mathrm{cov}[v^{\circ}(t), v^{\circ}(s)] = V^{\circ}\delta(t-s) = (V+\Delta V)\delta(t-s), \quad V > 0, \quad \Delta V \geqslant 0.$$

这里 $\Delta W = \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i W_i$；$\Delta V = \sum_{j=1}^{M} e_j V_j$；$\varepsilon_i, e_j$均是非负不确定扰动参数；$W_i, V_j$均是已知非负定对称矩阵. 控制目标函数被定义为

$$J(u, W^{\circ}, V^{\circ}) = \lim_{t\to\infty} E[x^{\tau}(t)Qx(t) + u^{\tau}(t)Ru(t)] \tag{3}$$

假设(1)$V>0$；(2)(A,C)是能检测的；(3)$(A, W^{\frac{1}{2}})$是能稳定的；(4)$R>0$；(5)(A,B)是能稳定的；(6)$(A, Q^{\frac{1}{2}})$是能检测的.

当噪声协方差距阵不扰动，即 $\Delta W=0, \Delta V=0$ 时，在上述假设(1)—(6)下，存在使控制目标达到极小的唯一渐近稳定的 LQG 闭环调节器

$$u(t) = -G\hat{x}(t), \quad G = R^{-1}B^{\tau}P_1, \tag{4}$$

$$P_1A + A^{\tau}P_1 - P_1BR^{-1}B^{\tau}P_1 + Q = 0, \tag{5}$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K[y(t) - C\hat{x}(t)], K = P_2C^{\tau}V^{-1}, \tag{6}$$

$$AP_2 + P_2A^{\tau} - P_2C^{\tau}V^{-1}CP_2 + W = 0. \tag{7}$$

当 $\Delta W\neq 0, \Delta V\neq 0$ 时，采用稳态滤波器(6)，则估计误差方差阵收敛到代数 Riccati 方程

$$(A-KC)P^{\circ}_2 + P^{\circ}_2(A-KC)^{\tau} + KV^{\circ}K^{\tau} + W^{\circ} = 0$$

收稿日期 1994-09-08

的唯一解[1]. 应用文[2]中方法可以将控制目标(3)直接转化为等价形式

$$J(u,W^{\circ},V^{\circ}) = \mathrm{tr}[W^{\circ}(P_1 + X)] + \mathrm{tr}(V^{\circ}K^{\tau}XK).$$

其中 X 是代数 Riccati 方程

$$(A - KC)^{\tau}X + X(A - KC) + G^{\tau}RG = 0$$

的唯一解. 记控制目标对理想值的偏离度为

$$\begin{aligned}\Delta J(u,\Delta W,\Delta V) &= J(u,W^{\circ},V^{\circ}) - J(u,W,V)\\ &= \mathrm{tr}[\Delta W(P_1 + X)] + \mathrm{tr}(\Delta VK^{\tau}XK) \leqslant \gamma.\end{aligned} \tag{8}$$

式中的 γ 是根据实际需要设定的允许偏离度上界. 这里, 目的是要构造一个确保(8)式恒成立的有关矩阵对($\Delta W,\Delta V$)的最大自由扰动界, 并在该界限内极小化不确定下的最坏性能.

2 确保控制目标的扰动界

设 $\Omega=\{(\Delta W,\Delta V):0\leqslant\Delta W\leqslant\Delta W^{m};0\leqslant\Delta V\leqslant\Delta V^{m}\}$是一个有界闭凸集. 显然, $\Delta J(u,\Delta W,\Delta V):\Omega\to\boldsymbol{R}$ 是关于矩阵对($\Delta W,\Delta V$)的线性映射, 并具有以下性质:

性质 1. 对于$(\Delta W_i,\Delta V_i)\in\Omega(i=1,2)$, 若 $\Delta W_1\leqslant\Delta W_2,\Delta V_1\leqslant\Delta V_2$, 则 $\Delta J(u,\Delta W_1,\Delta V_1)\leqslant\Delta J(u,\Delta W_2,\Delta V_2)$;

性质 2. 对 $\alpha\in\boldsymbol{R}(0<\alpha<1)$, 若 $\Delta W=\alpha\Delta W_1+(1-\alpha)\Delta W_2,\Delta V=\alpha\Delta V_1+(1-\alpha)\Delta V_2$, 则 $\Delta J(u,\Delta W,\Delta V)\leqslant\max\{\Delta J(u,\Delta W_1,\Delta V_1),\Delta J(u,\Delta W_2,\Delta V_2)\}$.

利用性质 1,2 及文[3]中有关紧 致凸集上的极值原理, 容易证得下述定理.

定理 2.1 设 $\Omega=\{(\Delta W,\Delta V):0\leqslant\Delta W\leqslant\Delta W^{m};0\leqslant\Delta V\leqslant\Delta V^{m}\}$, 记 $\gamma=\max\limits_{(\Delta W,\Delta V)\in\Omega}\Delta J(u,\Delta W,\Delta V)$, 则 γ 必被($\Delta W^{m},\Delta V^{m}$)达到.

设$(\Delta W^{m},\Delta V^{m})=(\sum\limits_{i=1}^{N}\varepsilon_i^{m}W_i,\sum\limits_{j=1}^{M}e_j^{m}V_j)$, $0\leqslant\varepsilon_i\leqslant\varepsilon_i^{m}$, $0\leqslant e_j\leqslant e_j^{m}$. 由定理 2.1 知

$$\Delta J(u,\Delta W^{m},\Delta V^{m}) = \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i^{m}\mathrm{tr}[W_i(P_1 + X)] + \sum_{j=1}^{M}e_j^{m}\mathrm{tr}(V_jK^{\tau}XK) = \gamma$$

令 $\varepsilon^{m}=(\varepsilon_1^{m},\varepsilon_2^{m},\cdots,\varepsilon_N^{m})$, $e^{m}=(e_1^{m},e_2^{m},\cdots,e_M^{m})$, 并设 $\Omega(\varepsilon^{m},e^{m})=\{(\Delta W,\Delta V):0\leqslant\Delta W\leqslant\sum\limits_{i=1}^{N}\varepsilon_i^{m}W_i;0\leqslant\Delta V\leqslant\sum\limits_{j=1}^{M}e_j^{m}V_j\}$是定义在 $N+M$ 维超平面

$$H^{N+M}:\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i^{m}a_i + \sum_{j=1}^{M}e_j^{m}b_j = \gamma \tag{9}$$

上的一非空有界闭凸集类, 其中 $a_i=\mathrm{tr}[W_i(P_1+X)]$, $b_j=\mathrm{tr}(V_jK^{\tau}XK)$. 要在 $\Omega(\varepsilon^{m},e^{m})$中寻求一个使矩阵对($\Delta W,\Delta V$)自由扰动范围达到最大的集合, 它可以拓扑等价地转化为 $\boldsymbol{R}^{N+M}$空间中. 在(9)式约束下, 求使 $N+M$ 维超长方体的体积达到最大, 即

$$\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i^{m}a_i+\sum_{j=1}^{M}e_j^{m}b_j=\gamma,$$

$$\max(\varepsilon_1^{m}\cdot\varepsilon_2^{m}\cdots\varepsilon_N^{m}\cdot e_1^{m}\cdot e_2^{m}\cdots e_M^{m}),\ \varepsilon_i^{m}>0(i=1,2,\cdots,N),\ e_j^{m}>0(j=1,2,\cdots,M).$$

利用 Lagrange 乘子法可解得唯一最大值点为

$$\varepsilon_i^{*} = \gamma/(N + M)a_i(i = 1,2,\cdots,N);e_j^{*} = \gamma/(N + M)b_j(j = 1,2,\cdots,M).$$

定理 2.2. 在假设(1)—(6)下, 对具有不确定噪声的连续时间随机线性控制系统(1)

和(2),若采用闭环调节器和滤波器(4)—(7),则存在不确定噪声协方差矩阵对($\Delta W,\Delta V$)的最大自由扰动集合

$$\Omega^* = \{(\Delta W,\Delta V):0 \leqslant \Delta W \leqslant \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i^* W_i;0 \leqslant \Delta V \leqslant \sum_{j=1}^{M}e_j^* V_j\}.$$

当($\Delta W,\Delta V$)$\in \Omega^*$时,能确保(8)式恒成立.

3　极小极大鲁棒 LQG 调节器

设 U^+是对应于(4)式的全体允许控制集合,记($\Delta W^*,\Delta V^*$)=($\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i^* W_i,\sum_{j=1}^{M}e_j^* V_j$),($W^*,V^*$)=($W+\Delta W^*,V+\Delta V^*$),若采用与($W^*,V^*$)对应的标准 Kalman 滤波器

$$\dot{\hat{x}}^*(t) = A\hat{x}^*(t) + Bu(t) + K^*[y(t) - C\hat{x}^*(t)],\quad K^* = P_2^* C^\tau V^{*-1},\tag{10}$$

$$AP_2^* + P_2^* A^\tau - P_2^* C^\tau V^{*-1} CP_2^* + W^* = 0,\tag{11}$$

并以所得的状态估计 $\hat{x}^*(t)$构成状态反馈律

$$u^*(t) = - G\hat{x}^*(t).\tag{12}$$

由最优估计与控制原理及 ΔJ 的性质 1,易得下面定理.

定理 3.1. 在定理 2.2 的条件下,在 Ω^* 中选择最大矩阵对($\Delta W^*,\Delta V^*$),并采用与它对应的标准 Kalman 滤波器和控制律(10)—(12).则存在鞍点($u^*,\Delta W^*,\Delta V^*$)满足鞍点不等式

$$\Delta J(u^*,\Delta W,\Delta V) \leqslant \Delta J(u^*,\Delta W^*,\Delta V^*) \leqslant \Delta J(u,\Delta W^*,\Delta V^*).\tag{13}$$

此时,由对策论基本原理可得到使(13)式成立的充分必要条件为[3]

$$\min_{u\in U^+}\ \max_{(\Delta W,\Delta V)\in\Omega^*} \Delta J(u,\Delta W,\Delta V) = \max_{(\Delta W,\Delta V)\in\Omega^*}\ \min_{u\in U^+} \Delta J(u,\Delta W,\Delta V),$$

即最坏情况下的 LQG 最优调节器就是极小极大鲁棒 LQG 调节器.采用这种鲁棒控制设计方法对系统(1)和(2)实行控制,不仅能使控制目标达到任意预先设定的范围内,而且还能相对地极小化不确定下的最坏性能.

参　考　文　献

1　Luo J S, Johnson A. Stability robustness of the continuous-time LQG system under plant perturbation and uncertainty, *Automatica*, 1993, **29**(2):485−489.

2　Looze D P, Poor H V, Vastola K S, Daragh J C. Minimax control of linear stochastic systems with noise uncertainty, *IEEE. Trans. A. C.*, 1983, **28**(9):882−888.

3　Baser T, Oster G J. Dynamic noncooperative game theory, New York: Academic Press, 1982.

PERTURBATING BOUND OF GUARANTEED COST FOR CONTINUOUS-TIME LQG OPTIMAL CONTROL WITH UNCERTAIN NOISE

XI HONGSHENG　YANG XIAOXIAN

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027)

Key words　Robust LQG optimal control, guaranteed cost, perturbating bound.