研究简报

一类串联排队网络的局部函数表达式[1)]

刘端华 涂菶生
(南开大学计算机与系统科学系 天津 300071)

关键词 串联排队网格，局部函数表达式，梯度估计，离散事件动态系统.

1 引言

扰动分析是一种研究离散事件动态系统的重要方法[1]. 文[2]曾针对 $GI/G/\mathrm{m}$ 排队系统，提出了梯度估计的局部函数表达式，这里将给出这种方法在一类复杂串联排队网络上的扩展.

2 系统描述

考虑由 m 级服务站串联构成的排队网络，第 i 级服务站是一个 $GI/G/n_i$排队系统($i=1,\cdots,m$)，顾客到达系统后，依序经过每一级服务站，最后从第 m 级出来，完成其全部服务过程，排队规则为先到先服务(FCFS). 记 C_k为第 k 个到达顾客，a_k为其到达时刻，$v_k=a_k-a_{k-1}$为 C_{k-1}与 C_k 的间隔时间. 假定 $v_k(k\geqslant 1)$独立同分布，其分布函数为 $H(x)$. 由概率论知 v_k可由逆变换 $v_k=H^{-1}(x)=\inf\{x:H(x)\geqslant u_k^0\}$实现，其中 u_k^0为$[0,1]$上的独立均匀分布. 用 s_{ij}表示第 i 级站中第 j 个服务台，所有服务时间均相互独立，且和到达过程亦相互独立，同一站中诸服务台具有相同的服务时间分布. 设第 i 站的服务时间与随机变量 s_i具有相同的分布，s_i的分布函数设为 $F_i(x,\theta_i)$，其中 θ_i 为连续参数，同样，s_i可由 $s_i=F_i^{-1}(\theta_i,u_i)=\inf\{x:F_i(x,\theta_i)\geqslant u_i\}$给出，其中 $u_i\in[0,1]$. 令 $s_j^i[k]$为 s_{ij}对经过它的第 k 个顾客的服务时间，则

$$s_j^i[k]=F_i^{-1}(\theta_i,\ u_j^i[k]),u_j^i[k]\in[0,1]. \tag{1}$$

这里 $u_j^i[k]$表示产生 $s_j^i[k]$的独立均匀随机变量. 定义序列 $\boldsymbol{\omega}=\{u_1^0,u_2^0,\cdots,u_1^1[1],u_1^1[2],\cdots,\cdots,u_{n_m}^m[1],u_{n_m}^m[2],\cdots\}$，它代表了系统中所有的随机因素，记参数向量 $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\cdots,\theta_m]^T$，设系统共服务了 N 个顾客. 考虑这 N 个顾客的平均系统时间，记 T_k为 C_k的系统时间，从而平均系统时间定义为 $T(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega})=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}T_k$. 进一步，用 C_k^i表示按时间先后到达第 i

1) “863”计划 CIMS 主题和国家自然科学基金资助项目.
收稿日期 1994-03-14

站的第 k 个顾客，a_k^i，x_k^i表示相应的到达时刻与离去时刻；s_k^i，T_k^i表示相应的服务时间与系统时间．则容易推出

$$T(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k^m - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k. \tag{2}$$

定义系统的性能测度为 $J(\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{E}\ \{T(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega})\}$．

3　局部函数表达式

考虑采样性能测度 $T(\theta,\omega)$，给定 $\boldsymbol{\theta}$ 一值，在一次采样实现 $\boldsymbol{\omega}$ 下，系统的运行轨线就完全确定了．观察第 i 级服务站，设有 N_j^i个顾客经过 s_{ij}（显然 $N = \sum_{j=1}^{n_i} N_j^i$），这 N_j^i个顾客构成了 s_{ij}的 k_j^i个忙期，且第 l 个忙期包含 N_{jl}^i个顾客（易知 $\sum_{l=1}^{K_j^i} N_{jl}^i = N_j^i$），用 $C_{jl}^i[1]$，$C_{jl}^i[2]$，…，$C_{jl}^i[N_{jl}^i]$依序代表这 N_{jl}^i个顾客．用 $a_{jl}^i[r]$，$x_{jl}^i[r]$，$s_{jl}^i[r]$和 $T_{jl}^i[r]$分别表示 $C_{jl}^i[r]$的到达时刻、离去时刻、服务时间和停留时间（$r=1,\cdots,N_{jl}^i$）．由（1）式易知 $s_{jl}^i[r] = F_i^{-1}(\theta_i, u_{jl}^i[r])$，$u_{jl}^i[r] \in [0,1]$．由于 $C_{jl}^i[r]$是 s_{ij}上第 l 个忙期连续服务的第 r 个顾客，从而有

$$x_{jl}^i[r] = \sum_{t=1}^{r} s_{jl}^i[t] + a_{jl}^i[1] = G_{jl}^i[r](\theta_i) + a_{jl}^i[1], \tag{3}$$

其中 $G_{jl}^i[r](\theta_i) = \sum_{t=1}^{r} F_i^{-1}(\theta_i, u_{jl}^i[t])$．特别是，对第 m 级站有

$$\sum_{k=1}^{N} x_k^m = \sum_{j=1}^{n_m}\sum_{l=1}^{k_j^m}\sum_{r=1}^{N_{jl}^m}(N_{jl}^m - r + 1)F_m^{-1}(\theta_m, u_{jl}^m[r]) + \sum_{j=1}^{n_m}\sum_{l=1}^{k_j^m} N_{jl}^m a_{jl}^m[1]. \tag{4}$$

由于任一顾客到达第 i 级站的时刻即是它离开第 $i-1$ 级站的时刻（$i=2,\cdots,m$），而同一顾客在不同站中的序号不同，故设 $a_{jl}^m[1] = x_{j_{m-1}l_{m-1}}^{m-1}[r_{m-1}]$，…，$a_{j_2l_2}^2[1] = x_{j_1l_1}^1[r_1]$．由（3）式可知 $a_{jl}^m[1] = \sum_{i=1}^{m-1} G_{j_il_i}^i[r_i](\theta_i) + a'_{j_1l_1}[1]$，从而 4 式成为

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} x_k^m = &\sum_{l=1}^{n_m}\sum_{l=1}^{k_j^m}\sum_{r=1}^{N_{jl}^m}(N_{jl}^m - r + 1)F_m^{-1}(\theta_m, u_{jl}^m[r]) \\ &+ \sum_{j=1}^{n_m}\sum_{l=1}^{k_j^m} N_{jl}^m \sum_{i=1}^{m-1} G_{j_il_i}^i[r_i](\theta_i) + \sum_{j=1}^{n_m}\sum_{l=1}^{k_j^m} N_{jl}^m \cdot a'_{j_1l_1}[1].\end{aligned} \tag{5}$$

合并具有相同 θ_i的项，则采样性能测度（2）式为

$$T(\theta,\omega) = \sum_{i=1}^{m} H_i(\theta_i) + H_0, \tag{6}$$

其中

$$H_m(\theta_m) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n_m}\sum_{l=1}^{k_j^m}\sum_{r=1}^{N_{jl}^m}(N_{jl}^m - r + 1)F_m^{-1}(\theta_m, u_{jl}^m[r]),$$

$$H_i(\theta_i) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n_m}\sum_{l=1}^{k_j^m} N_{jl}^m \cdot G_{j_il_i}^i[r_i](\theta_i),\ i = 1,\cdots,m-1,$$

$$H_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n_m}\sum_{l=1}^{k_j^m} N_{jl}^m a_{j_1l_1}^1[1] - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k.$$

这表明 $T(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega})$与给定参数 $\boldsymbol{\theta}$ 点之间存在关系式(6). 从完全类似于文[2]中的分析知,当概率分布满足一定条件时,这个关系式在 $\boldsymbol{\theta}$ 点附近的一个邻域内也成立,亦即在一次采样的前题下,$T(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega})$关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的局部函数关系式成立. 从而,此式对于 $\boldsymbol{\theta}$ 在 $\boldsymbol{\theta}$ 点处的梯度可直接求导得

$$\frac{\partial T(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega})}{\partial \theta_i}=\frac{\mathrm{d}H_i(\theta_i)}{\mathrm{d}\theta_i},i=1,\cdots,m. \tag{7}$$

进一步,考虑性能测度 $J(\boldsymbol{\theta})$对于 $\boldsymbol{\theta}$ 的梯度,如果下面的交换性条件成立

$$\frac{\partial E\{T(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega})\}}{\partial \boldsymbol{\theta}_i}=\boldsymbol{E}\{\frac{\partial T(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\theta}_i}\},\boldsymbol{i}=1,\cdots,\boldsymbol{m}, \tag{8}$$

则取适当大的整数 M,将有

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}=E\{\frac{\partial T(\theta,\omega)}{\partial \theta_i}\}\approx\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\frac{\partial T(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega}^k)}{\partial \theta_i}. \tag{9}$$

从而得到$\frac{\partial T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}$的一个估计,其中$\frac{\partial T(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega}^k)}{\partial \boldsymbol{\theta}_i}$可由局部函数表达式求导得到.

4 无偏性分析

可交换性条件(8)是扰动分析理论中的一个重要内容,对于这里所考虑的网络,由(2)式知条件(8)等价于

$$\frac{\partial E x_k^m}{\partial \theta_i}=E\{\frac{\partial x_k^m}{\partial \theta_i}\},\quad i=1,\cdots,m,k=1,\cdots,N. \tag{10}$$

容易看出,x_k^i只与第 1 到第 i 级站有关,而与 i 以后的站无关,故 x_k^i可写成 $x_k^i(\theta_1,\cdots,\theta_i)$,$i\geqslant 1$. 在文[2]定理 1 及其推论的基础上,可证明如下定理.

$$\frac{\partial E x_k^i(\theta_1,\cdots,\theta_i)}{\partial \theta_j}=E\{\frac{\partial x_k^i(\theta_1,\cdots,\theta_i)}{\partial \theta_j}\},$$
$$i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,i;k\geqslant 1. \tag{11}$$

综上所述,局部函数表达式为进一步的随机优化提供了一种有效的梯度估计方法.

参 考 文 献

[1] Ho Y C,Cao X R. Perturbation Analysis of Discrete Event Dynamic Systems,Boston:Kluwer Academic Pub.,1991.

[2] 刘端华,涂奉生. GI/G/m 排队系统梯度估计的一种新方法. 自动化学报,1995,**21**(6):696—704.

LOCAL FUNCTION EXPRESSION APPROACH OF A CLASS OF TANDEM QUEUING NETWORKS

LIU RUIHUA TU FENGSHENG

(*Department of Computer & System Sciences,Nankai University,Tianjin* 300071)

Key words Tandem queuing system,local function expression,gradient estimation,discrete event dynamic systems. fr