第 23 卷 第 3 期
1997 年 5 月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 23, No. 3
May, 1997

短 文

一类可修非周期 Fork-Join 排队网络分析

丁连宇 杨德礼
（大连理工大学系统工程所 大连 116024）

摘 要 研究一类排队空间有限且服务台可修的非周期 Fork-Join 排队网络，给出求解稳态概率的直接法和等效法，并计算一些排队指标和可修指标（如稳态队长、服务台的可用度和服务台的失效概率），最后通过仿真验证其正确性.

关键词 排队网络，可靠性，稳态，概率分布.

1 引言

非周期 Fork-Join 排队网络（AFJQN）[1]是一类输入和输出均具有同步性的离散事件运态系统，在计算机领域反映并行过程，在制造系统是装配和拆卸的模型抽象. 由于现有文献分析 AFJQN 时采用的方法都假定服务不失效[1-3]，对于服务台可能失效和可修的 AFJQN（RAFJQN），无论从排队论角度，还是可修理论角度，都是值得研究的.

考察图 1 所示的具有两个并联服务台的 RAFJQN，其中 M^j为服务台；B^j为存贮器，$j=1,2$；服务规则为先到先服务；完成的服务总能输出.

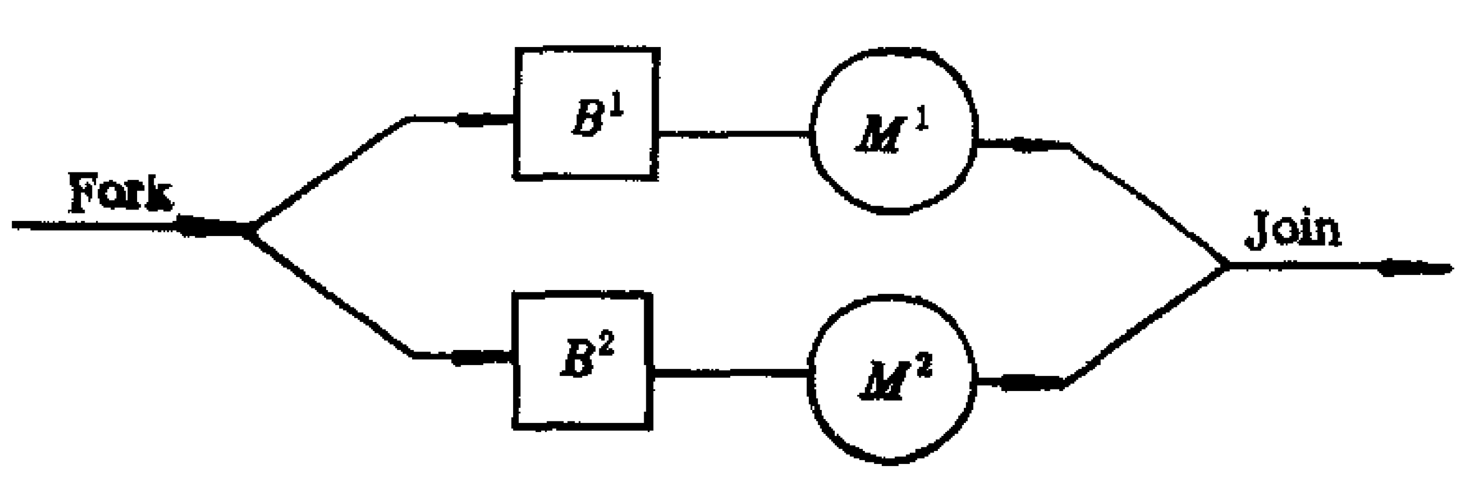

图 1 具有两个服务台的 RAFJQN

令 λ，α^j，β^j和 γ^j分别为输入率、服务率、修复率和失效率，$j=1,2$. 进一步假设：(1) 空闲服务台不失效；(2) 失效服务台等待修复时已服务过的时间有效；(3) 服务台修复后，功能完全恢复.

本文基于文献[3]的分析框架，借鉴文献[4]在分析单服务台可修系统的思想，有效地解决服务台可修的 RAFJQN 的性能分析，并给出一些指标的计算方法.

2 RAFJQN 的稳定条件

令 S_n^j为队列 j 中第 n 个顾客从开始接受服务到服务结束的时间，其中包括为该顾客

收稿日期 1994-12-16

服务期间内服务台发生失效而进行修理的时间. 根据文献[4]可得

$$1/\bar{\alpha}^j = E\bar{S}_n^j = (\beta^j + r^j)/\alpha^j\beta^j,\ j = 1,2. \tag{1}$$

因此，可将 $\bar{S}_n^j$ 理解为“服务”时间. 这样图 1 的 RAFJQN 就可等效为服务率是 $\bar{\alpha}^j$ 的 AFJQN.

定理 1. 对于 u 个服务台并联的 AFJQN，达到稳定平衡的条件是

$$\lambda < \min_{j\in Q}\alpha^j\beta^j/(\beta^j + \gamma^j),\ Q = \{1,2,\cdots,u\}. \tag{2}$$

证明 . 文献[5]已经证明了通常排队理论中系统达到稳态平衡的条件，即输入率严格小于所有的服务率对 AFJQN 同样成立. 由于 RAFJQN 可等效成 AFJQN，根据(1)式可知(2)式是 RAFJQN 的稳定条件.

3 RAFJQN 的分析

设系统状态空间为$\{(i,j,k):0\leqslant i\leqslant N+1,0\leqslant j\leqslant M+1,0\leqslant k\leqslant 2\}$. 其中 i,j 分别为两列队长(即排队等待和正在接受服务的任务总和)；k 为故障标志，$k=0$ 表示系统正常，$k=j$ 表示服务台 j 故障，$j=1,2$；N,M 为存贮容量；t 时刻系统处于(i,j,k)状态的概率为 $P_{ijk}(t)$. 根据图 2 的状态转移图，可建立如下平衡方程：

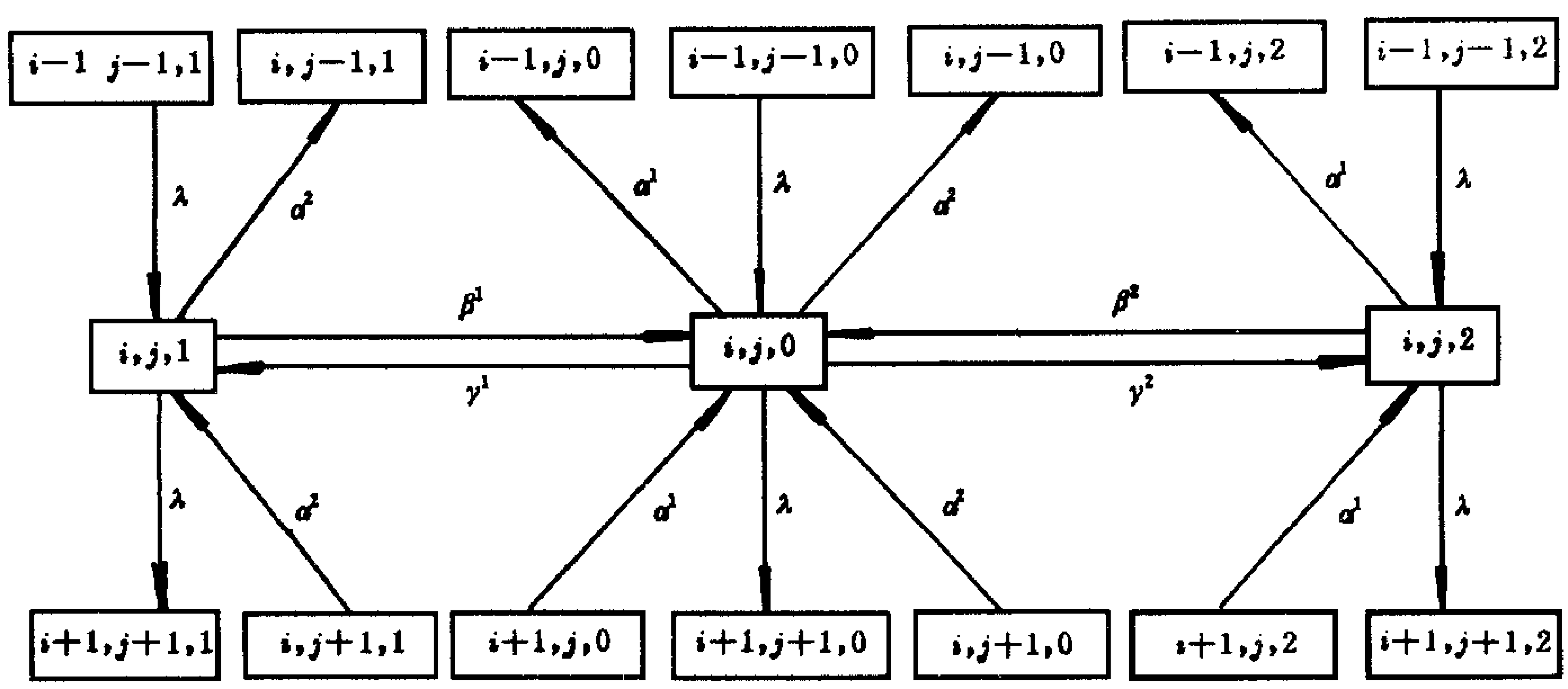

图 2　RAFJQN 的状态转移图

$$\varepsilon P_{i,j,o} = \alpha^1 P_{i+1,j,o} + \alpha^2 P_{i,j+1,o} + \lambda P_{i-1,j-1,o} + \beta^1 P_{i,j,1} + \beta^2 P_{i,j,2}, 0\leqslant i\leqslant N, 0\leqslant j\leqslant M; \tag{3}$$

$$\varepsilon P_{N+1,j,o} = \alpha^2 P_{N+1,j+1,o} + \lambda P_{N,j-1,o} + \beta^1 P_{N+1,j,1} + \beta^2 P_{N+1,j,2},\ 0\leqslant j\leqslant M; \tag{4}$$

$$\varepsilon P_{i,M+1,o} = \alpha^1 P_{i+1,M+1,o} + \lambda P_{i-1,M,o} + \beta^1 P_{i,M+1,1} + \beta^2 P_{i,M+1,2},\ 0\leqslant i\leqslant N; \tag{5}$$

$$\zeta P_{i,j,1} = \alpha^2 P_{i,j+1,1} + \lambda P_{i-1,j-1,1} + \gamma^1 P_{i,j,o},\ 0\leqslant i\leqslant N+1, 0\leqslant j\leqslant M; \tag{6}$$

$$\zeta P_{i,M+1,1} = \lambda P_{i-1,M,1} + \gamma^1 P_{i,M+1,o},\ 0\leqslant i\leqslant N+1; \tag{7}$$

$$\eta P_{i,j,2} = \alpha^l P_{i+1,j,2} + \lambda P_{i-1,j-1,2} + \gamma^2 P_{i,j,0},\quad 0\leqslant i\leqslant N,\quad 0\leqslant j\leqslant M+1; \tag{8}$$

$$\eta P_{N+1,j,2} = \lambda P_{n,j-1,2} + \gamma^2 P_{N+1,j,o},\quad 0\leqslant j\leqslant M+1; \tag{9}$$

$$\sum_{i=0}^{N+1}\sum_{j=0}^{M+1}\sum_{k=0}^{2} P_{ijk} = 1, \tag{10}$$

其中 $\varepsilon=\lambda+\alpha^1+\alpha^2+\gamma^1+\gamma^2$，$\zeta=\lambda+\alpha^2+\beta^l$，$\eta=\lambda+\alpha^l+\beta^2$，且有 $\alpha^1 P_{o,j,o}=0$，$\alpha^1 P_{o,j,2}=0$，

$\alpha^2 P_{i,o,o}=0, \alpha^2 P_{i,o,1}=0, \lambda P_{N+1,j,k}=0$.

下面采用分块矩阵求解，令

$$\Omega_j = [P_{o.j.o}, P_{1.j.o}, \cdots, P_{N+1.j.o}]^T,$$
$$\Phi_j = [P_{o.j.1}, P_{1.j.1}, \cdots, P_{N+1.j.1}]^T,$$
$$\Psi_j = [P_{o.j.2}, P_{1.j.2}, \cdots, P_{N+1.j.2}]^T,$$
$$\Omega = [\Omega_o, \Omega_1, \cdots, \Omega_{M+1}]^T, \Phi = [\Phi_0, \Phi_1, \cdots, \Phi_{M+1}]^T,$$
$$\Psi = [\Psi_0, \Psi_1, \cdots, \Psi_{M+1}{}^T, H = [0, 0, \cdots, 0, 1]^T_{(q-1)\times 1},$$

$$A_i=\begin{bmatrix} a_i & c_i & & & \\ & a_i & c_i & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & a_i & c_i \\ & & & & a_i \end{bmatrix}_{v\times v}, \quad B_i=\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ b_i & 0 & & & \\ & b_i & 0 & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & b_i & 0 \end{bmatrix}_{v\times v}, \quad F_d=\begin{bmatrix} d_i & & & \\ & d_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & d_1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{v\times v},$$

$$D_i=\begin{bmatrix} d_i & & & \\ & d_i & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \\ & & & d_i \end{bmatrix}_{v\times v}, \quad E_i=\begin{bmatrix} e_i & & & \\ & e_i & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \\ & & & e_i \end{bmatrix}_{v\times v} \quad F_e=\begin{bmatrix} e_1 & & & \\ & e_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & e_1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{v\times v},$$

$$F_a=\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ & a_1 & c_1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_1 & c_1 \\ 1 & 1 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}_{v\times v}, \quad F_b=\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ b_1 & 0 & & & 0 \\ & b_1 & 0 & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ 1 & 1 & & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{v\times v}, \quad F_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{v\times v}.$$

这里 $i=1,2,3; v=N+2; q=v(M+2); a_1=\varepsilon/\alpha^2; a_2=\xi/\alpha^2; a_3=\eta/\alpha^2; b_1=b_2=b_3=-\lambda/\alpha^2;$ $c_1=c_3=-\alpha'/\alpha;\ c_2=0; d_1=-\beta'/\alpha^2; d_2=-\gamma'/\alpha^2; d_3=-\gamma^2/\alpha^2; e_1=-\beta^2/\alpha^2$. 另有

$$R_1=\begin{bmatrix} A_1 & -I & & & \\ B_1 & A_1 & -I & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & B_1 & A_1 & -I \\ F_1 & \cdots & F_1 & F_b & F_a \end{bmatrix}_{q\times q}, \quad R_2=\begin{bmatrix} A_2 & -I & & & \\ B_2 & A_2 & -I & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & B_2 & A_2 & -I \\ & & & B_2 & A_2 \end{bmatrix}_{q\times q},$$

$$R_3=\begin{bmatrix} A_3 & & & \\ B_3 & A_3 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & B_3 & A_3 \\ & & & B_3 & A_3 \end{bmatrix}_{q\times q}, \quad M_1=\begin{bmatrix} D_1 & & & \\ & D_1 & 0 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & D_1 \\ F_1 & \cdots & F_1 & F_d \end{bmatrix}_{q\times q},$$

$$M_i=\begin{bmatrix} D_i & & & \\ & D_i & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & D_i \end{bmatrix}_{q\times q},(i=2,3),\quad N_1=\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & E_1 & 0 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & E_1 \\ F_1 & F_1 & \cdots & F_e \end{bmatrix}_{q\times q}$$

于是将(3)—(10)式写成如下矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} R_1 & M_1 & N_1 \\ M_2 & R_2 & 0 \\ M_3 & 0 & R_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Omega \\ \Phi \\ \Psi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

若令 $W=R_1-M_1R_2^{-1}M_2-N_1R_3^{-1}M_3$，则有

$$\Omega=W^{-1}H,$$
$$\Phi=-R_2^{-1}M_2W^{-1}H,$$
$$\Psi=-R_3^{-1}M_3W^{-1}H.$$

至此解得稳态概率分布$\{P_{ijk}\}$，称此方法为直接法. 为降低状态维数，克服计算量大的不足，可通过(1)式将 RAFJQN 等效成 AFJQN. 令系统状态空间为$\{(i,j):0\leqslant i\leqslant N+1,0\leqslant j\leqslant M+1\}$，则有

$$\bar{\varepsilon}\bar{P}_{i,j}=\bar{\alpha}^1\bar{P}_{i+1,j}+\bar{\alpha}^2\bar{P}_{i,j+1}+\lambda\bar{P}_{i-1,j-1},\quad 0\leqslant i\leqslant N,0\leqslant j\leqslant M,\tag{11}$$

$$\bar{\varepsilon}\bar{P}_{N+1,j}=\bar{\alpha}^2\bar{P}_{N+1,j+1}+\overline{\lambda P}_{N,j-1},\ 0\leqslant j\leqslant M,\tag{12}$$

$$\bar{\varepsilon}\bar{P}_{i,M+1}=\bar{\alpha}^1\bar{P}_{i+1,M+1}+\overline{\lambda P}_{i-1,M},\ 0\leqslant i\leqslant N,\tag{13}$$

$$\sum_{i=0}^{N+1}\sum_{j=0}^{M+1}\bar{P}_{ij}=1.\tag{14}$$

这里 $\bar{\varepsilon}=\lambda+\bar{\alpha}^1+\bar{\alpha}^2$ 根据(11)—(14)式及直接法的求解过程易得$\{\bar{P}_{ij}\}$，称此方法为等效法. 可见等效法的状态维数是直接法三分之一.

定理 2. 令队列 j 的稳态队长为 L^j，服务台 j 的稳态失效概率和稳态可用度分别为 P_f^j和 $P_u^j(j=1,2)$，则有如下排队指标和可修指标

$$E[L^1]=\sum_{i=0}^{N+1}\sum_{j=0}^{M+1}\sum_{k=0}^{\varepsilon}iP_{ijk},\ E[L^2]=\sum_{j=0}^{M+1}\sum_{i=0}^{N+1}\sum_{k=0}^{3}jP_{ijk},\tag{15}$$

$$P_f^1=\sum_{i=0}^{N+1}\sum_{j=0}^{M+1}(P_{ij1}+P_{ij3}),\ P_f^2=\sum_{i=0}^{N+1}\sum_{j=0}^{M+1}(P_{ij2}+P_{ij3}),\tag{16}$$

$$P_u^1=1-P_f^1,\ P_u^2=1-P_f^2.\tag{17}$$

证明. 由于 $P(L^1+i)=\sum_{j=0}^{M+1}\sum_{k=0}^{3}P_{ijk}$，$P(L^2=j)=\sum_{i=0}^{N+1}\sum_{k=0}^{3}P_{ijk}$，所以(15)式成立. 根据失效概率和可用度的定义易得(16)和(17)式.

4　实例

$N=M=2,(\alpha^1,\alpha^2,\beta^1,\beta^2,\gamma^1,\gamma^2)=(1.0,1.25,0.5,0.5,0.05,0.05)$，由(1)式得 $\bar{\alpha}^1=0.909,\bar{\alpha}^2=1.36$. 计算结果见表 1 和表 2，显然直接法与等效法在稳态队长的求解中相对

误差小于 1%.

表 1 直接法

	$\lambda=0.2$	$\lambda=0.4$	$\lambda=0.6$	$\lambda=0.8$
$E[L^1]$	1.912703	1.989827	2.068267	2.145000
$E[L^2]$	1.761534	1.841491	1.923587	2.004980
P_f^1	0.047979	0.044854	0.041479	0.038068
P_f^2	0.054655	0.050384	0.045906	0.041539
P_u^1	0.952021	0.955146	0.958521	0.961932
P_u^2	0.945345	0.949616	0.954094	0.958461

表 2 等效法

	$\lambda=0.2$	$\lambda=0.4$	$\lambda=0.6$	$\lambda=0.8$
$E[\bar{L}^1]$	1.916493	1.996161	2.078524	2.159798
$E[\bar{L}^2]$	1.755162	1.839556	1.927790	2.015916

5 结束语

实例验证表明，本文所研究的 RAFJQN 是有效的．相信对其进一步地研究，将会推动通讯系统、计算机集成制造系统(CIMS)、柔性制造系统(FMS)和并行处理的广泛应用.

参 考 文 献

[1] Baccelli F. Acyclic Fork-Join queuing networks. *J. ACM*, 1989, **36**(3): 615—642.

[2] Zhang Z S. Analytical results for waiting time and system size distributions in two parallel queuing systems. *SIAM J. Appl. Math.*, 1990, **50**(4): 1176—1193

[3] 徐学雷，郑大钟．一类 Fork-Join 排队系统的分析．控制理论与应用，1994，**11**(3): 361—365

[4] 曹晋华，程侃．服务台可修的 M/G/1 排队系统分析．应用数学学报，1982，**5**(2): 113—127

[5] Konstantopoulos P, Walrand J. Stationary and stability of Fork-Join networks. *J. Appl. Prob.*, 1989, **26**: 604—614.

ANALYSIS OF A CLASS OF REPAIRABLE ACYCLIC FORK-JOIN QUEUING NETWORKS

DING LIANYU YANG DELI

(*Institute of Systems Engineering, DUT, Dalian* 116024)

Abstract A class of repairable acyclic fork-join queuing networks (RAFJQN) with finite queuing spaces and repairable service machine is considered. In calculating steady-state probability, both direct method and equivalient method are proposed. In addition, some indices (such as steady-state queuing length, failure probabilities of server and utilizable rates of server) in queueing theory and repairable theoy are obtained. Finally, examples are given by simulation.

Key words Queuing network models, reliability, steady states, probability distribution function.