第23卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol. 23, No. 3
1997年5月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1997

短 文

奇异 H$^\infty$控制问题的二次矩阵不等式的可解性[1)]

忻 欣 冯纯伯
(东南大学自动化研究所 南京 210018)

摘 要 研究具有无穷远零点的奇异 H$^\infty$控制问题的二次矩阵不等式的可解性，证明了通过求解广义特征值问题，可以直接求得二次矩阵不等式的解，从而简化了原需通过复杂的系统分解和变换来求解二次矩阵不等式的方法. 文中建立了基于几何控制理论和基于 J-无损分解理论的两种不同的奇异 H$^\infty$控制分析方法之间的联系，并揭示了具有无穷远零点的奇异 H$^\infty$控制系统的特征空间结构.

关键词 H$^\infty$控制，二次矩阵不等式，无穷远零点，广义特征值问题.

1 引 言

考虑如下包括被控对象和加权函数的广义对象 $P(s)$

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:cc} A & B_1 & B_2 \\ \hdashline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \tag{1}$$

其中 $z \in R^m$，$y \in R^q$，$w \in R^r$ 和 $u \in R^p$ 分别为输出信号、测量信号、外部输入信号和控制信号. H$^\infty$控制问题就是求一控制器 $u(s)=K(s)y(s)$ 使得闭环系统稳定，并使 w 到 z 的传递函数 $\Phi(s)$ 满足 $\|\Phi(s)\|_\infty < 1$. 至今为止的 H$^\infty$控制问题的绝大多数解法均假设(1)式中的 $P_{12}(s)$ 和 $P_{21}(s)$ 在包含无穷远点在内的虚轴上不含零点[1]，然而许多控制问题并不满足这一假设。通常称这种 $P_{12}(s)$ 和/或 $P_{21}(s)$ 在含无穷远点在内的虚轴上的 H$^\infty$控制问题为奇异或非标准 H$^\infty$控制问题. 对奇异 H$^\infty$控制问题的研究成为近两三年 H$^\infty$制领域的一个研究热点[2,3].

对含无穷远零点的奇异 H$^\infty$控制问题，文[2]提出了通过检验两个二次矩阵不等式的可解性来判断 H$^\infty$控制问题是否可解的方法；文[3]基于(J, J')-无损分解理论[4]和描述形式的系统表征，提出了通过求解广义特征问题来解奇异 H$^\infty$控制问题的方法. 文[2]利用几何控制理论，提出了通过复杂的系统分解和变换来求解二次矩阵不等式的方法，但较

1) 此课题得到国家自然科学基金和中国博士后科学基金的资助. 本文的初稿曾在1994年中国控制与决策会议上宣读.
收稿日期 1994-09-19

为复杂，与之相比，文[3]的基于求解广义特征值问题的判据较为简单和直观. 本文将证明通过求解广义特征值问题,可以直接求解二次矩阵不等式.

在本文中 $\nu(-sE+A;D)$ 表示矩阵束 $-sE+A$ 在域 D 中的特征值所对应的广义特征空间;$\mathrm{Im}\ P$ 表示矩阵 P 所张成的空间;$\rho(X)$ 表示矩阵 X 的最大特征值;C_- 表示开左半平面.

2 二次矩阵不等式

对于矩阵 $X=X^T\in R^{n\times n}$ 和 $Y=Y^T\in R^{n\times n}$,定义

$$F(X):=\begin{bmatrix} A^TX+XA+XB_1B_1^TX+C_1^TC_1 & XB_2+C_1^TD_{12} \\ B_2^TX+D_{12}^TC_1 & D_{12}^TD_{12} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$G(Y):=\begin{bmatrix} AY+YA^T+YC_1^TC_1Y+B_1B_1^T & YC_2^T+B_1D_{21}^T \\ C_2Y+D_{21}B_1^T & D_{21}D_{21}^T \end{bmatrix}. \tag{3}$$

若 $F(X)\geq 0$ 和 $G(Y)\geq 0$,则称 X 和 Y 分别是二次矩阵不等式 $F(X)\geq 0$ 和 $G(Y)\geq 0$ 的解. 另外，定义如下两个矩阵束

$$L(X,s):=[-sI+A+B_1B_1^TX \quad B_2],\quad M(Y,s):=\begin{bmatrix} -sI+A+YC_1^TC_1 \\ C_2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

引理 1.[2] 设广义对象(1)中的 $P_{12}(s)$ 和 $P_{21}(s)$ 均在有限虚轴上无零点,则 H^∞ 控制问题有解的充要条件是二次矩阵不等式 $F(X)\geq 0$ 和 $G(Y)\geq 0$ 存在半正定解 X 和 Y,且满足 $\rho(XY)\leq 1$ 和如下秩条件:

(1) $\mathrm{rank}\ F(X)=p$,

(2) $\mathrm{rank}\ G(X)=q$,

(3) $\mathrm{rank}\ [L^T(X,s) \quad F^T(X)]^T=n+p, \forall\ \mathrm{Re}[s]\geq 0$,

(4) $\mathrm{rank}[M(Y,s) \quad G(Y)]=n+q, \forall\ \mathrm{Re}[s]\geq 0$.

3 基于广义特征值问题的二次矩阵不等式的解

关于 $P_{12}(s)$ 的无穷远零点结构,有如下结论.

引理 2.[5] 存在酉矩阵 S 和 T,使得有

$$S\begin{bmatrix} -sI+A & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}T=\begin{bmatrix} -sE_f+A_f & 0 & 0 \\ * & -sE_{11}+A_{11} & A_{12} \\ * & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

其中正规矩阵束 $\begin{bmatrix} -sE_{11}+A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ 包含 $P_{12}(s)$ 所有的无穷远零点因子,且 $|E_{11}|\neq 0$;若相应于(5)式可将 S 和 T 划分为

$$S=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & 0 \\ S_{31} & S_{32} \end{bmatrix},\ T=\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

则 $T_{23}\in R^{p\times p}$非奇异，$S_{32}^T\in R^{m\times m}$列满秩.

现计算如下两广义特征值问题

$$\mathrm{Im}\left\{\begin{bmatrix} P_{120} & 0 \\ * & I_p \end{bmatrix}\right\}=v\left\{\begin{bmatrix} -sI+A & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix},\infty\right\}, \tag{7}$$

$$\mathrm{Im}\left\{\begin{bmatrix} P_{12} \\ \Phi_{12} \\ U_{12} \end{bmatrix}\right\}=v\left\{\begin{bmatrix} -sI+A & B_1B_1^T & B_2 \\ -C_1^TC_1 & -sI-A^T & -C_1^TD_{12} \\ D_{12}^TC_1 & B_2^T & D_{12}^TD_{12} \end{bmatrix},C_-\right\}. \tag{8}$$

利用引理 2 可求得 $P_{120}=T_{12}$. 对于(7)和(8)式，有以下定理.

定理 1. 等式

$$\begin{bmatrix} A & B_1B_1^T & \hat{B}_2 \\ -C_1^TC_1 & -A^T & -C_1^T\hat{D}_{12} \\ \hat{D}_{12}^TC_1 & \hat{B}_2^T & \hat{D}_{12}^T\hat{D}_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{12} & P_{120} \\ \Phi_{12} & 0 \\ U_1 & U_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_{12} & P_{120} \\ \Phi_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{12} & 0 \\ U_3 & A_\infty \end{bmatrix} \tag{9}$$

成立. 其中 $\hat{B}_2=-S_{31}^T$, $\hat{D}_{12}=-S_{32}^T$, $U_1:=-A_{22}T_{23}^{-1}U_{12}$, $U_2:=A_{21}-A_{22}T_{23}^{-1}T_{22}$, $U_3:=-E_{11}^{-1}A_{12}T_{23}^{-1}U_{12}$, $A_\infty:=E_{11}^{-1}(A_{11}-A_{12}T_{23}^{-1}T_{22})$.

证明. 从略(类似文[6]中定理 1 的证明). 由定理 1 可得如下主要结论.

定理 2. 若$[P_{12}\quad P_{120}]$非奇异，则 $X=[\Phi_{12}\quad 0][P_{12}\quad P_{120}]^{-1}$是二次矩阵不等式 $F(X)\geq 0$的解,且引理 1 中的秩条件(1)和(3)成立.

证明. 记 $\hat{F}:=-(\hat{D}_{12}^T\hat{D}_{12})^{-1}(\hat{B}_2^TX+\hat{D}_{12}^TC_1)$, $M_{12}:=-A_{22}T_{23}^{-1}$. 由(9)式得 $F(X)=S^T(X)S(X)\geq 0$,其中 $S(X):=\hat{D}_{12}[-\hat{F}\quad M_{12}]$. 利用引理 2 和 3 可知

$$\begin{vmatrix} -sI+A+B_1B_1^TX+\hat{B}_2F & B_2-\hat{B}_2M_{12} \\ -\hat{F} & M_{12} \end{vmatrix}\neq 0,\ \mathrm{Re}[s]\geq 0 \tag{10}$$

成立. 这样 $\mathrm{rank}F(X)=\mathrm{rank}S(X)=\mathrm{rank}\overline{D}_{12}[-\hat{F}\quad M_{12}]=p$,故引理 1 中的秩条件(1)成立. 再记

$$R_1:=\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -\hat{F}^T\hat{D}_{12}^T\hat{D}_{12} \\ 0 & M_{12}^T\hat{D}_{12}^T\hat{D}_{12} \end{bmatrix},\ R_2(s):=\begin{bmatrix} -sI+A+B_1B_1^TX & B_2 \\ -\hat{F} & M_{12} \end{bmatrix},$$

由 (10)式知 rank $R_1=n+p$, rank $R_2(s)=n+p$,$\mathrm{Re}[s]\geq 0$，故引理 1 中的秩条件(3)成立. 证毕.

文[2]证明了满足引理 1 中矩阵秩约束(1)和(3)的二次不等式的解 X 若存在,则是唯一的;文[3]证明了若具有无穷远零点的控制问题有解,则$[P_{12}\quad P_{120}]$非奇异，故二次矩阵不等式 $F(X)\geq 0$ 存在满足引理 1 中的矩阵秩约束(1)和(3)的解 X 的充要条件是$[P_{12}\quad P_{120}]$非奇异.

对偶地,可通过考虑解另两广义特征值问题来求 $G(Y)\geq 0$，这里从略.

4 例　子

设广义对象(1)为 $B_1^T=[0.2\quad 0\quad 0.4]$,$D_{21}=1$,$C_2=[0\quad 0\quad 1]$,

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},B_2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix},C_1=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 6\end{bmatrix},\ D_{12}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

在本例中,$n=3$,$p=2$, D_{12}列不满秩. 计算式(7)和(8)得

$$P_{120}=\begin{bmatrix}0.5774\\ 0.5774\\ -0.5774\end{bmatrix},P_{12}=\begin{bmatrix}1.0000 & 0.8269\\ 0.2802 & 0.6626\\ -0.4289 & -0.2281\end{bmatrix},\Phi_{12}=\begin{bmatrix}0.1015 & 0.3788\\ 0.1453 & 0.6212\\ 0.2468 & 1.0000\end{bmatrix}.$$

因$[P_{12}\quad P_{120}]$非奇异，故 $F(X)\geq 0$ 有解．现考虑定理 1 中的两个秩条件，计算 $F(X)$的特征值和$[L^T(X,s)\quad F^T(X)]$的零点知引理 1 中的秩条件(1)和(3)成立.

参 考 文 献

[1] Glover K, Dolye J C. State-space formulate for all stabilizing controllers that satisfying an H$^\infty$-norm bound and relations to risk sensitivity. *Systems & Control Letters*, 1988, **11**: 167—172.

[2] Stoorvogel A A. The singular H$^\infty$ control with dynamic measurement feedback. *SIAM Journal on control Optimization*, 1991, **29**:160—184.

[3] Kimura H, Xin X. Chain-scattering approach to non-standard H$^\infty$ control problems. *Proceedings of International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Regensburg* 1993.

[4] Xin X, Kimura H. (J, J')-lossless factorization for descriptor systems. *Linear Alegbra and Its Applications*, 1994, **206**: 1289—1318.

[5] Copeland B R, Safonov M G. Zero cancelling compensation for singular control problems and their application to the inner-outer factorization problem. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1992,**2**:139—164.

[6] Xin X, Kimura H. Singular (J, J')-lossless factorization for strictly proper functions. *International Joural of Control*, 1994, **59**:1383-1400.

SOLVABILITY OF QUADRATIC MATRIX INEQUALITIES OF SINGULAR H$^\infty$ CONTROL PROBLEMS

XIN XIN FENG CHUNBO

(*Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing* 210018)

Abstract The solvability of quadratic matrix inequalities of singular H$^\infty$ control problems with infinite zeros is studied in this paper. It is proved that the quadratic matrix inequality can be solved directly via the generalized eigenvalue problems. The previous method of solving the quadratic matrix inequality involving complicated decompositions and transformations of the systems is avoided. The connection between two different approaches to singular H$^\infty$ control problems based on geometric control theory and (J,J')-lossless factorization theory respectively is established. This paper illustrates the eigenspace structure of singular H$^\infty$ control systems.

Key words Geometric H$^\infty$ control, quadratic matrix inequality, infinite zeros, generalized eigenvalue problems.