线性对象的正实控制问题[1)]

郭　雷　忻　欣　冯纯伯
（东南大学自动化所　南京　210018）

摘　要　在时域中考虑线性对象的正实控制(PRC)问题. 对于一般的广义对象，在状态空间中提出了一个基于线性矩阵不等式(LMI)的统一处理 PRC 问题的方法，指出 PRC 问题可解的充分必要条件是与系统的实现有关的三个 LMI 可解，并可利用 LMI 的解构造出所有的正则 PR 控制器. 此外还提出了降价 PR 控制器的存在条件并讨论了可行的综合方法.

关键词　线性系统，正实性，线性矩阵不等式，降价控制器.

1　引言

考虑如下的线性系统 Σ：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du. \end{cases}$$

其中　D 为方阵，传递函数为 $G(s)=D+C(sI-A)^{-1}B$.

若 $G(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$ 上解析且满足 $G(\mathrm{j}w)+G^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}w)>0, \forall\, w\in[0,\infty)$ 则称 $G(s)$ 为严正实的；若还有 $G(\mathrm{j}\infty)+G^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}\infty)>0$，则称 $G(s)$ 为扩展严正实的(extended strictly positive real，简记为 ESPR).

正实性在系统的稳定性，耗散性，鲁棒性和非线性控制研究中具有重要意义[1,2]. 所谓正实控制(PRC)问题是指[2]：对于一个给定的对象 ΣG，构造内稳控制器 ΣC 使闭环系统 Σcl 为 ESPR. 这样的 ΣC 称为 PR 控制器，这里 ΣG，ΣC 与 Σcl 分别用(1—3)式表示

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \\ y = C_2 x + D_{21} w. \end{cases} \tag{1}$$

其中　$x\in R^n, w\in R^{m_1}, u\in R^{m_2}, y\in R^{p_2}, z_1\in R^{p_1}(p_1=m_1)$ 分别表示状态，外部输入，控制，量测和被控向量.

ΣC 为 n_c 阶动态输出反馈控制器，其动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y, \\ u = C_c x_c + D_c y. \end{cases} \tag{2}$$

闭环系统为 Σcl

---

1)　国家自然科学基金和国家教委留学回国人员专项基金资助课题.
收稿日期　1996-10-30

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A_{cl}\boldsymbol{x} + B_{cl}\boldsymbol{w}, \\ \boldsymbol{z} = C_{cl}\boldsymbol{x} + D_{cl}\boldsymbol{w}, \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$\begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl} & D_{cl} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_2 \\ \hat{D}_{12} \end{bmatrix} G(\hat{C}_2 \quad \hat{D}_{12}), \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & G^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} := \left[\begin{array}{cc:c:cc} A & 0 & B_1 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_c} \\ \hdashline C_1 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ \hdashline C_2 & 0 & D_{21} & D_c^{\mathrm{T}} & B_c^{\mathrm{T}} \\ 0 & I_{n_c} & 0 & C_c^{\mathrm{T}} & A_c^{\mathrm{T}} \end{array}\right]. \tag{5}$$

PRC 问题在频域中已得到一些研究,但正实性的频域检验往往计算量较大,因而在时域中讨论 PRC 问题的状态空间解,成为最近的一个研究热点[2—6]. 鉴于正实性与有界实性的关系,文献[3]运用 Cayley 交换将 PRC 问题转化为 H^∞ 问题,其结果依赖于 H^∞ 问题的解. 随着 H^∞ 理论的进展,可以仿文献[3]的方法利用 H^∞ 的结果来处理 PRC 问题,但同时也会带来计算复杂等问题. 文献[4—6]直接考虑 PRC 问题,仅限于对特殊对象讨论状态反馈或静态输出反馈问题. 最近,文献[2]较为深入地研究了 PRC 问题:先考虑严正则控制器,在此基础上提出了存在正则动态输出反馈 PR 控制器的充分必要条件,并给出一个正则 PR 控制器的综合方法,它依赖于两个代数 Riccati 方程(ARE)的镇定解,控制器阶次等于 n. 但文献[2]的正则 PR 控制器解要求 $\sum G$ 满足以下假设:A1) (A, B_2, C_2) 可镇定可检测;A2) $D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$, $D_{21} = (0 \quad I)$;A3) $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A - \mathrm{j}wI & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_2$, $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A - \mathrm{j}wI & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m_2, \forall\, w \in R$. 这里,A1)是存在镇定闭环系统的控制器的必要条件,但 A2),A3)却不是必需的.

本文采用代数方法研究 PRC 问题,该法已经在许多线性控制问题中得到应用[7—10]. 指出一般的 PRC 问题可归结为线性矩阵不等式(LMI)的可解性,且 PR 控制器的构造依赖于 LMI 的解,而 LMI 目前已有良好的内点算法可以求解[7]. 本文的工作具有以下特点:第一,考虑最一般的对象,不需要 A2),A3)的假设,得到了正则 PR 控制器存在的充分必要条件;第二,给出了所有正则 PR 控制器的综合方法;并在以上工作的基础上,研究了降阶 PR 控制器的存在性和设计方法.

2 可解判据

下面是 Kalman-Yacubovich-Popov 正实性引理的一个变形[1,2,5].

引理 1. 下列叙述是等价的:

(i)系统 Σ 是 ESPR 的,且 A 稳定;

(ii)存在 $P>0$ 满足

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA & PB - C^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}}P - C & -(D^{\mathrm{T}} + D) \end{bmatrix} < 0. \tag{6}$$

在 Σcl 应用引理 1,并将(3),(4)式代入(6)式,注意到(4)式对 G 的线性性质,可知对于 Σcl,(6)式等价于

$$\overline{B}G\overline{C}+(\overline{B}G\overline{C})^{\mathrm{T}}+\overline{\Omega}<0, \tag{7}$$

其中

$$\overline{B}:=\begin{bmatrix}P\hat{B}_2\\ \hat{D}_{12}\end{bmatrix},\overline{C}:=[\hat{C}_2\quad -\hat{D}_{21}],\overline{\Omega}:=\begin{bmatrix}\hat{A}^{\mathrm{T}}P+P\hat{A} & \hat{C}_1^{\mathrm{T}}-P\hat{B}_1\\ \hat{C}_1-\hat{B}_1^{\mathrm{T}}P & -(D_{11}^{\mathrm{T}}+D_{11})\end{bmatrix}.$$

设　$D_{11}^{\mathrm{T}}+D_{11}>0$,则 $(D_{11}^{\mathrm{T}}+D_{11})^{\frac{1}{2}}$ 有意义,令

$$B:=\begin{pmatrix}\overline{B}\\ 0\end{pmatrix}:=\begin{bmatrix}P\hat{B}_2\\ \hat{D}_{12}\\ 0\end{bmatrix},C^{\mathrm{T}}:=\begin{pmatrix}\overline{C}^{\mathrm{T}}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{C}_2^{\mathrm{T}}\\ -\hat{D}_{21}^{\mathrm{T}}\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\Omega:=\begin{bmatrix}\hat{A}^{\mathrm{T}}P+P\hat{A} & \hat{C}_1^{\mathrm{T}}-P\hat{B}_1 & 0\\ \hat{C}_1-\hat{B}_1^{\mathrm{T}}P & -2(D_{11}^{\mathrm{T}}+D_{11}) & (D_{11}^{\mathrm{T}}+D_{11})^{\frac{1}{2}}\\ 0 & (D_{11}^{\mathrm{T}}+D_{11})^{\frac{1}{2}} & -I\end{bmatrix}. \tag{8}$$

利用 Schur 准则可证(7)式等价于

$$BGC+(BGC)^{\mathrm{T}}+\Omega<0. \tag{9}$$

下面是关于 LMI 的一个代数性质.

引理 2[7,8]. 设 B,C,Ω 已知,且 B 不行满秩,C 不列满秩,则关于 G 的 LMI(9)式有解的充分必要条件是

$$B^{\perp}\Omega B^{\perp^{\mathrm{T}}}<0,\quad (C^{\mathrm{T}})^{\perp}\Omega(C^{\mathrm{T}})^{\perp^{\mathrm{T}}}<0,$$

其中　$B^{\perp^{\mathrm{T}}}=Ker(B^{\mathrm{T}}),C^{\perp^{\mathrm{T}}}=Ker(C^{\mathrm{T}})$.

定义两个 LMI 的解集合

$$L_B:=\left\{X:X\in R^{n\times n},X=X^{\mathrm{T}}>0,\begin{pmatrix}B_2\\ D_{12}\end{pmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}AX+XA^{\mathrm{T}} & XC_1^{\mathrm{T}}-B_1\\ C_1X-B_1^{\mathrm{T}} & -(D_{11}^{\mathrm{T}}+D_{11})\end{bmatrix}\begin{pmatrix}B_2\\ D_{12}\end{pmatrix}<0\right\},$$

$$L_C:=\left\{Y:Y\in R^{n\times n},Y=Y^{\mathrm{T}}>0,\begin{bmatrix}C_2^{\mathrm{T}}\\ D_{21}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}YA+A^{\mathrm{T}}Y & YB_1-C_1^{\mathrm{T}}\\ B_1^{\mathrm{T}}Y-C_1 & -(D_{11}^{\mathrm{T}}+D_{11})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_2^{\mathrm{T}}\\ D_{21}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\perp^{\mathrm{T}}}<0\right\}.$$

若用 $\hat{A},\hat{B}_1,\hat{B}_2,\hat{C}_1,\hat{C}_2,\hat{D}_{12},\hat{D}_{21},\hat{D}_{11}$ 分别代替 $A,B_1,B_2,C_1,C_2,D_{12},D_{21},D_{11}$,则相应地记上面的集合为 $\hat{L}_B,\hat{L}_C$.

定理 1. 下列叙述是等价的:

(i)存在正则 PR 控制器;

(ii)$L_D\neq 0$;　其中

$$L_D:=\left\{(X,Y):X\in L_B,Y\in L_C,\begin{pmatrix}X & I\\ I & Y\end{pmatrix}\geqslant 0\right\}.$$

这时,PR 控制器的阶次 $n_c=\mathrm{rank}(X-Y^{-1})$.

证明. 第一步,由引理 1,2 及(9),(10)式知 PRC 问题可解当且仅当

$$B^{\perp}\Omega B^{\perp^{\mathrm{T}}}<0,\qquad (C^{\mathrm{T}})^{\perp}\Omega(C^{\mathrm{T}})^{\perp^{\mathrm{T}}}<0,$$

其中 B,C,Ω 如(8)式定义. 故

$$B^{\perp}=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}\hat{B}_2\\ \hat{D}_{12}\end{pmatrix}^{\perp} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P^{-1} & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix},\quad C^{\mathrm{T}\perp}=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}\hat{C}_2^{\mathrm{T}}\\ -\hat{D}_{21}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}.$$

将 $B^{\perp}$,$C^{\mathrm{T}\perp}$代入,并令 $R:=P^{-1}$,则有

$$B^{\perp}\Omega B^{\perp^{\mathrm{T}}}=\begin{pmatrix}\hat{B}_2\\ \hat{D}_{12}\end{pmatrix}^{\perp}\begin{pmatrix}\hat{A}R+R\hat{A}^{\mathrm{T}} & R\hat{C}_1^{\mathrm{T}}-\hat{B}_1\\ \hat{C}_1R-\hat{B}_1^{\mathrm{T}} & -(D_{11}^{\mathrm{T}}+D_{11})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{B}_2\\ \hat{D}_{12}\end{pmatrix}^{\perp^{\mathrm{T}}},$$

$$C^{\mathrm{T}\perp}\Omega C^{\mathrm{T}\perp^{\mathrm{T}}}=\begin{pmatrix}\hat{C}_2^{\mathrm{T}}\\ -\hat{D}_{21}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}^{\perp}\begin{pmatrix}P\hat{A}+\hat{A}^{\mathrm{T}}P & \hat{C}_1^{\mathrm{T}}-P\hat{B}_1\\ \hat{C}_1-\hat{B}_1^{\mathrm{T}}P & -(D_{11}^{\mathrm{T}}+D_{11})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{C}_2^{\mathrm{T}}\\ -\hat{D}_{21}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}^{\perp^{\mathrm{T}}}.$$

因而,PRC 问题可解等价于存在 P 使 $P\in\hat{L}_B$,$P^{-1}\in\hat{L}_C$.

第二步,设(i)成立,将 P 相应于 A 适当分块,使 X 与 A 的维数相同,记

$$\begin{pmatrix}X & P_{12}\\ P_{12}^{\mathrm{T}} & P_{22}\end{pmatrix}:=P,\qquad Y:=(X-P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}})^{-1}. \tag{10}$$

其中 $P_{22}>0$. 这时

$$X-Y^{-1}=P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}}. \tag{11}$$

又由(5)式

$$\begin{pmatrix}\hat{B}_2\\ \hat{D}_{12}\end{pmatrix}^{\perp}=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}B_2\\ D_{12}\end{pmatrix}^{\perp} & 0\end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc:c}I_n & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_{m1}\\ \hdashline 0 & I_{n_c} & 0\end{array}\right].$$

再将(4),(10),(11)式代入 $\hat{L}_B$ 中的不等式,化简可得

$$\begin{pmatrix}B_2\\ D_{12}\end{pmatrix}^{\perp}\begin{pmatrix}AX+XA^{\mathrm{T}} & XC_1^{\mathrm{T}}-B_1\\ C_1X-B_1^{\mathrm{T}} & -(D_{11}^{\mathrm{T}}+D_{11})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_2\\ D_{12}\end{pmatrix}^{\perp^{\mathrm{T}}}<0.$$

从而得存在 $P\in\hat{L}_B\Longleftrightarrow$存在 $X\in L_B$. 同理有存在 $P^{-1}\in\hat{L}_C\Longleftrightarrow$存在 $Y\in L_C$.

又注意到(10)式中,$Y\leqslant X^{-1}$,故$\begin{pmatrix}X & I\\ I & Y\end{pmatrix}\geqslant 0$. 因此(i)⇒(ii). 若(ii)成立,则可按(10),(11)式构造 P(若 $X-Y^{-1}=0$,则令 $P=X$),则 $P\in\hat{L}_B$,$P^{-1}\in\hat{L}_C$. 故(ii)⇒(i). 结合(4),(5)式知控制器阶次等于 P_{22}的维数,即 $\mathrm{rank}(X-Y^{-1})$. 证毕.

注 1. 比较文献[8,9]关于 H^{∞}问题的研究,定理 1 的方法更为直接,它避开了对静态反馈情形的单独论述. 这个定理揭示了 PRC 问题可解的充分必要条件,指出存在正则的固定价 PR 控制器当且仅当三个 LMI 可解且满足一个秩条件.

注 2. 联系引理 2 与文献[8]定理 1 可知它实际上给出了所有 PR 控制器的构造. 即每一个 PR 控制器都与一个按(10),(11)式定义的 P 对应.

注 3. 综合方法分两步:1)先求$(X,Y)\in L_D$,然后按(10)式求 P;2)得到 B,C,Ω 后,求解 LMI(9)得到 G,或适当选择参数后直接代入文献[8]中的 $g_{gen}(B,C,\Omega)$.

3 结果比较

文献[2]在假设 A2),A3)下,把正则 PR 控制器的存在性归结为涉及一个耦合条件的两个 ARE 的可解性,下面简述定理 1 与文献[2]主要结果的关系:

当 $D_{12}=\begin{pmatrix}0\\I\end{pmatrix}$,$D_{21}=(0\quad I)$时,有

$$D_{12}^{+}=D_{12}^{\mathrm T},\quad D_{12}^{\perp}=[I\quad 0],\quad D_{21}^{+}=D_{21}^{\mathrm T},\quad D_{21}^{\perp^{\mathrm T}}=[I\quad 0],\tag{12}$$

且

$$D_{21}^{+\mathrm T}(D_{11}^{\mathrm T}+D_{11})D_{21}^{\perp}=0,\quad D_{12}^{+}(D_{11}^{\mathrm T}+D_{11})D_{12}^{\perp^{\mathrm T}}=0,\tag{13}$$

其中上标"+"表示广义逆. 又注意到此时有

$$\begin{bmatrix}B_2\\D_{12}\end{bmatrix}^{\perp}=\begin{bmatrix}I_n & -B_2D_{12}^{+}\\0 & D_{12}^{\perp}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}C_2^{\mathrm T}\\D_{21}^{\mathrm T}\end{bmatrix}^{\perp}=\begin{bmatrix}I_n & C_2^{\mathrm T}D_{21}^{+^{\mathrm T}}\\0 & D_{21}^{\perp^{\mathrm T}}\end{bmatrix},\tag{14}$$

代入 L_B,L_c,并设

$$D_1\coloneqq D_{12}^{\perp}(D_{11}^{\mathrm T}+D_{11})D_{12}^{\perp\mathrm T}>0,\quad D_2\coloneqq D_{21}^{\perp^{\mathrm T}}D_{11}^{\perp^{\mathrm T}}+D_{11})D_{21}^{\perp}>0,\tag{15}$$

应用 Schur 准则,并利用(12),(13),(14)式可得如下两个代数 Riccati 不等式(ARI)

$$XA_1^{\mathrm T}+A_1X+R_1+XQ_1X<0,\quad A_2^{\mathrm T}Y+YA_2+R_2+YQ_2Y<0,\tag{16}$$

其中

$$A_1:=A-B_2D_{12}^{+}C_1-B_1D_{12}^{\perp^{\mathrm T}}D_1^{-1}D_{12}^{\perp}B_1^{\mathrm T},\quad Q_1:=C_1^{\mathrm T}D_{12}^{\perp^{\mathrm T}}D_1^{-1}D_{12}^{\perp}C_1,$$

$$R_1:=B_2D_{12}^{+}B_1^{\mathrm T}+B_1D_{12}^{+^{\mathrm T}}B_2^{\mathrm T}+B_1D_{12}^{\perp^{\mathrm T}}D_1^{-1}D_{12}^{\perp}B_1^{\mathrm T}-B_2D_{12}^{+}(D_{11}^{\mathrm T}+D_{11})D_{12}^{+^{\mathrm T}}B_2^{\mathrm T},$$

$$A_2^{\mathrm T}:=A^{\mathrm T}-C_2^{\mathrm T}D_{21}^{+^{\mathrm T}}B_1^{\mathrm T}-C_1^{\mathrm T}D_{21}^{\perp}D_2^{-1}D_{21}^{\perp^{\mathrm T}}C_1,\quad Q_2:=B_1D_{21}^{\perp}D_2^{-1}D_{21}^{\perp^{\mathrm T}}B_1^{\mathrm T},$$

$$R_2:=C_2^{\mathrm T}D_{21}^{+^{\mathrm T}}C_1+C_1^{\mathrm T}D_{21}^{+}C_2+C_1^{\mathrm T}D_{21}^{\perp}D_1^{-1}D_{21}^{\perp^{\mathrm T}}C_1^{\mathrm T}-C_2^{\mathrm T}D_{21}^{+^{\mathrm T}}(D_{11}^{\mathrm T}+D_{11})D_{21}^{+}C_2,$$

又$\begin{pmatrix}X & I\\I & Y\end{pmatrix}\geqslant 0$ 等价于 $\rho(XY)\leqslant 1$,故可得

定理 2. 假设 $A2$)成立,则 PRC 问题可解(存在正则 PR 控制器)的充分必要条件是:(i)(15)式成立;(ii)存在 $X>0$,$Y>0$ 满足(16)式,且 $\rho(XY)\leqslant 1$.

与文献[2]的结果相比,定理 2 的优点在于:它不需条件 $A3$). 容易说明当 $A3$)也成立时,定理 2 等价于文献[2]的下列主要结果,证明从略.

推论. 假设 $A2$),$A3$)成立,则 PRC 问题存在正则 PR 控制器的充分必要条件是:(i)(15)式成立;(ii)下列 Riccati 方程存在镇定解 $X\geqslant 0$,$Y\geqslant 0$,且 $\rho(XY)\leqslant 1$.

$$A_1^{\mathrm T}X+XA_1+XR_1X+Q_1=0,\quad YA_2^{\mathrm T}+A_2Y+YR_2Y+Q_2=0$$

4　降阶 PR 控制器

由于 $\mathrm{rank}(X-Y^{-1})\leqslant n$,因而由定理 1 知控制器阶次不超过 n. 本节讨论何时能得到阶次低于 n 的 PR 控制器. 在定理 1 的基础上,对对象施以若干代数变换,则可以得到降阶的 PR 控制器的存在条件和设计方法.

定理 3. 对(1)式,下列叙述等价

(i)存在正则 PR 控制器;

(ii)存在 n_c 阶正则 PR 控制器,其中

$$n_c\leqslant\min\left\{n-\mathrm{rank}\begin{bmatrix}B_2\\D_{12}\end{bmatrix}+\mathrm{rank}D_{12},\,n-\mathrm{rank}(C_2\quad D_{21})+\mathrm{rank}D_{21}\right\}.$$

利用此定理可以直接推出有关状态反馈,全信息反馈的结果. 重要的是还可由此得到

降阶 PR 控制器的一个设计方法，该法仅涉及 LMI 的解法和系统等价变换. 定理的证明和设计的详细步骤参阅文献[10]关于降阶 H^∞控制器的研究，此处从略.

5 结束语

本文考虑最一般的线性对象的正实控制(PRC)问题. 对于一般的广义对象，基于 LMI 给出了动态输出反馈情形下 PRC 问题可解的充分必要条件，指出可利用 LMI 的解构造出所有的正则 PR 控制器，并将结果与文献[2]做了比较，表明本文的工作推广了文献[2]的结果. 此外还得到了降阶 PR 控制器的存在准则，联系文献[10]关于 H^∞控制的结果可以得到可行的综合方法，该法仅涉及 LMI 的解法和系统等价交换. 限于篇幅，本文未给出设计步骤，但具体的处理过程和 LMI 的求解方法可在文献[7—10]中找到. 本文的方法还可推广到离散系统的 PRC 问题以及鲁棒 PRC 问题.

参 考 文 献

[1] Anderson B D O, Vongpanitlerd S. Network analysis and synthesis: a modern systems theory approach. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1973.

[2] Sun W, Khargonekar P P, Shim D. Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1994, **39**(10): 2034—2046.

[3] Safanov M G, Jonckheere E A, Verma M, Limebeer D J N. Synthesis of positive real multivariable feedack systems. *Int. J. Contr.* 1987, **45**: 817—842.

[4] Haddad W M, Bernstein D S. Robust stabilization with povitive real uncertainty: Beyond the small gain theorem. *Syst. Contr. Lett.* 1991, **17**(3): 191—208.

[5] Weiss H, Wang Q, Speyer J L. System characterization of positive real conditions. *IEEE. Trans. Automat. Contr.* 1994, **39**(3): 540—544.

[6] Chen P, Cheng D, Qin H. A necessary and sufficient condition for feedback strictly positive real output. *Control Theory and Applications.* 1994. **11**(1): 64—68.

[7] Boyd S *et al.* Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM Studies in Applied Mathematics. 1994, **15**: 1—80.

[8] Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H^∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica.* 1994, **30**: 1307—1317.

[9] Gahinet P, Apkarian P. An LMI-based parameterization of all H^∞ controllers with applications. In: Proc. of the 32nd CDC, San Antonio, Texas, 1993, 656—661.

[10] 郭 雷，忻 欣，冯纯伯. 基于线性矩阵不等式的奇异 H^∞控制问题的降阶控制器. 控制理论与应用. 1996, **13**(6): 622—630.

THE POSITIVE REAL CONTROL PROBLEM FOR GENERALIZED LINEAR PLANTS

GUO LEI XIN XIN FENG CHUNBO

(Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing 210018)

Abstract This paper considers the positive real control(PRC) problem for generalized linear plants without any additional assumptions. A unified linear matrix inequality(LMI) based approach to PRC problems in proposed. It is shown that this problem is solvable if and only if three LMIs have positive definite solutions. All desired PR controllers can be parameterized via the solutions of LMIs. Moreover, an existence condition and design method of low-order positive real controllers are obtained based on the above LMI approach.

Key words Positive realness, linear system, matrix inequality, reduced-order controller.

郭 雷 1997 年获东南大学博士学位,现在东南大学电子学与通信博士后流动站工作. 目前主要研究方向是鲁棒控制, H^{∞}控制和非线性系统理论与应用.

忻 欣 1993 年获东南大学博士学位. 1993—1995 年在东南大学从事博士后研究工作. 目前主要研究方向是 H^{∞}控制理论及应用,鲁棒控制,非线性控制.

冯纯伯 1928 年生. 毕业于浙江大学电机系. 获前苏联技术科学副博士学位. 现为中国科学院院士,俄罗斯联邦自然科学院外籍院士,东南大学教授. 目前主要从事系统建模,鲁棒控制,自适应控制及智能控制理论及应用方面的研究.