第23卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 23, No. 4
1997年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jul, 1997

短 文

区间系统鲁棒稳定性的有限检验[1)]

田玉平 冯纯伯

（东南大学自动化研究所 南京 210018）

摘 要 讨论区间对象族能否被一给定补偿器鲁棒镇定的问题. 用 Sturm 判据给出闭环区间系统鲁棒稳定的充要条件.

关键词 鲁棒镇定，区间系统，有限检验.

1 引 言

一区间对象族

$$\Pi: =\{P(s): P(s)=\frac{N(s,\boldsymbol{q})}{D(s,\boldsymbol{r})},\ N(s,\boldsymbol{q})=\sum_{i=0}^{m} q_i s^i,\ D(s,\boldsymbol{r})=\sum_{i=0}^{n} r_i s^i,\\ q_i\in[q_i^-,q_i^+],\ r_i\in[r_i^-,r_i^+],\ m\leqslant n\} \tag{1}$$

是否能被一固定补偿器 $C(s)$ 鲁棒镇定，这至今仍是鲁棒控制理论中尚未解决的难题. 文献[1]证明，一个一阶补偿器 $C(s)=K\dfrac{s+z}{s+p}$ 若能同时镇定属于 Π 的 16 个 Kharitonov 顶点对象，则它能鲁棒镇定整个对象族. 文献[2]进一步指出，只要 $C(s)$ 的分子、分母多项式中只含有 s 的偶(或奇)次项，则上述有限检验的结论成立. 文献[3,4]取消了上述对补偿器阶次和结构的限制. 但所得到的条件仍有一定的保守性. 本文以多项式空间中凸方向的概念为基础，用 Sturm 判据给出符合有限检验条件的补偿器所应满足的更一般的代数条件.

2 区间系统鲁棒稳定性的有限检验条件

定义 1[5]. 一个多项式 g 称作是(n 阶稳定多项式空间中的)凸方向，系指：对于任意的 n 阶稳定多项式 f，若 $f+g$ 是稳定的，且对于所有的 $\lambda\in[0,1]$，$f+\lambda g$ 的阶数恒为 n，则 $f+\lambda g$ 对所有的 $\lambda\in[0,1]$ 都是稳定的.

文献[5]指出，若补偿器 $C(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$ 的分子、分母多项式 $N(s)$ 和 $C(s)$ 均是凸方向，

1) 国家自然科学基金资助项目.

收稿日期 1993-04-10

则 $C(s)$能鲁棒镇定 Π 的充要条件是 $C(s)$能同时镇定 Π 中的 16 个 Kharitonov 顶点对象：

$$P_K^{ij}(s)=\frac{N_K^i(s)}{D_K^j(s)},\ i,j=1,2,3,4,$$

其中

$$N_K^1(s)=q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^+ s^5 + \cdots,$$
$$N_K^2(s)=q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^- s^5 + \cdots,$$
$$N_K^3(s)=q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + \cdots,$$
$$N_K^4(s)=q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + \cdots,$$

$D_K^j(s)$的构造是类似的.

然而文献[5]只给出了凸方向的频域条件,而在许多控制器的分析和设计问题中我们更希望得到 $N(s)$和 $D(s)$在其系数空间中所应满足的代数条件. 为解决这一问题引入下列结果.

引理 1. 给定实系数多项式 $D(s)=\sum_{i=0}^{n} d_i s^i$，记

$$T_1(\omega)=\frac{d_1-d_3\omega+d_5\omega^2-d_7\omega^3+\cdots}{d_0-d_2\omega+d_4\omega^2-d_6\omega^3+\cdots}, \tag{2}$$

$$T_2(\omega)=\frac{d_1\omega+d_3\omega^2+d_5\omega^3+d_7\omega^4+\cdots}{d_0+d_2\omega+d_4\omega^2+d_6\omega^3+\cdots}, \tag{3}$$

则当 $T_1(\omega)$或 $T_2(\omega)$在 ω:0→∞内是单调减的,$D(s)$为凸方向.

引理 1 的证明方法同文献[3,4]，此处从略.

定理 1. 给定实系数多项式 $D(s)=\sum_{i=0}^{n} d_i s^i$，则当下列条件之一满足时,$D(s)$ 是凸方向：

1) $\sum_{i+j=h}(i-j)d_{2j}d_{2j+1}(-1)^h\geqslant 0,\ h=0,1,2,\cdots,n-1,$

2) $\sum_{i+j=h}(i-j-1)d_{2i}d_{2j+1}\geqslant 0,\ h=0,1,2,\cdots,n-1.$

证明．分别对 $T_1(\omega)$和 $T_2(\omega)$求导得：

$$\frac{dT_1(\omega)}{d\omega}=\frac{-d_0d_3+d_2d_1+(2d_0d_5-2d_4d_1)\omega+\cdots}{(d_0-d_2\omega+d_4\omega^2\text{-}d_6\omega^3+\cdots)^2}\triangleq-\frac{A(\omega)}{(\alpha(\omega))^2}, \tag{4}$$

$$\frac{dT_2(\omega)}{d\omega}=\frac{d_0d_1+2d_0d_3\omega+(3d_0d_5+d_2d_3-d_4d_1)\omega^2+\cdots}{(d_0+d_2\omega+d_4\omega^2+d_6\omega^3+\cdots)^2}=-\frac{B(\omega)}{(\beta(\omega))^2}. \tag{5}$$

显然，$T_1(\omega)$或 $T_2(\omega)$在 ω：0→∞内单调减的一个充分条件是多项式 $A(\omega)$或 $B(\omega)$的各系数均大于或等于零,由此可得定理 1，证毕.

注 1. 定理 1 中的条件 1) 已由文献[4]给出,但条件 2) 却没有被指出. 不难验证,多项式 $D(s)=s^4+s^3+s^2+2s-1$ 是凸方向. 但它只满足条件 2)而不满足条件 1).

定理 1 简单明了,易于判别,且概括了文献[1,2]等中所给出的顶点检验条件. 但从定理的证明中不难发现,这个结果仍是很保守的. 为了得到 $A(\omega)\geqslant 0$(或 $B(\omega)\geqslant 0$)，$\forall\ \omega\in[0,\infty)$的充要条件，我们构造多项式 $A(\omega)+\varepsilon$. 于是 $A(\omega)\geqslant 0$，$\forall\ \omega\in[0,\infty)$等价于 $A(\infty)\geqslant 0$，且 $A(\omega)+\varepsilon$ 对于任意小的正数 ε 在 ω：0→∞内没有实根. 记

$$\left.\begin{aligned} A_0(\omega,\varepsilon) &= A(\omega)+\varepsilon, \\ A_1(\omega) &= \frac{\partial A_0(\omega,\varepsilon)}{\partial\omega}, \\ A_2(\omega,\varepsilon) &= -\operatorname{Re}\left[\frac{A_0(\omega,\varepsilon)}{A_1(\omega)}\right], \\ &\cdots \\ A_r(\varepsilon) &= -\operatorname{Re}\left[\frac{A_{r-2}(\omega,\varepsilon)}{A_{r-1}(\omega,\varepsilon)}\right], \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

这里 Re[・]表示除式的余式.

类似地可得以 $B_0(\omega,\varepsilon),B_1(\omega),B_2(\omega,\varepsilon),\cdots,B_q(\varepsilon)$.

根据判别多项式在区间[a,b]内有无实根的 Sturm 判据[6]，可得到下面的定理.

定理 2.　给定实系数多项式 $D(s)=\sum_{i=0}^{n}d_is^i$,按(6)构造以下序列：

$$S_1=\{A_0(0,\varepsilon),A_1(0),\cdots,A_r(\varepsilon)\},$$
$$S_2=\{A_0(\infty,\varepsilon),A_1(\infty),\cdots,A_r(\varepsilon)\},$$
$$S_3=\{B_0(0,\varepsilon),B_1(0),\cdots,B_q(\varepsilon)\},$$
$$S_4=\{B_0(\infty,\varepsilon),B_1(\infty),\cdots,B_q(\varepsilon)\}.$$

如果对于任意小的正数 ε，$A_0(\infty,\varepsilon)\geqslant 0$，且序列 S_1 和 S_2 中元素的变号次数相等；或者，$B_0(\infty,\varepsilon)\geqslant 0$，且 S_3 和 S_4 中元素的变号次数相等，则 $D(s)$ 为凸方向.

注 2.　在序列 S_2 和 S_4 中，$A_i(\infty,\varepsilon)$ 和 $B_i(\infty,\varepsilon)$ 可分别用 $A_i(\omega,\varepsilon)$ 和 $B_i(\omega,\varepsilon)$ 的最高次项的系数代替.

注 3.　由于定理 2 给出了 $T_1(\omega)$ 和 $T_2(\omega)$ 单调减的充要条件(而文献[3,4]等给出的均是充分条件)，故它是目前在系数空间中判别一多项式是否为凸方向的保守性最小的结果.

例 1.　设 $D(s)=s^4+2s^3-\frac{5}{2}s^2-s+1$. 不难验证，此时定理 1 中的条件 1)和 2)均不满足，而按定理 2 的方法，可得到如下四个序列：

$$S_1=\{-\frac{1}{2}+\varepsilon,-2,-\varepsilon\},$$
$$S_2=\{-2,-4,-\varepsilon\},$$
$$S_3=\{1+\varepsilon,-4,-\varepsilon\},$$
$$S_4=\{4,8,-\varepsilon\}.$$

可以看到，$B_0(\infty,\varepsilon)>0$，且序列 S_3 和 S_4 中元素变号次数对于任意小的正数 ε 都是 1，故 $D(s)$ 是凸方向.

3　结语

闭环区间系统鲁棒稳定性的有限检验问题等价于稳定多项式空间中的凸方向判定问题，即当补偿器的分子、分母多项式均为凸方向时，该补偿器能鲁棒镇定区间对象族的充要条件是它能同时镇定族中 16 个 Kharitonov 顶点对象. 本文用 Sturm 法给出凸方向的

代数判据，从而得到符合有限检验结论的补偿器的系数所应满足的条件.

需要指出的是，本文得到的补偿器限定条件与区间对象的参数无关，即一旦补偿器满足所给条件，则对任意区间对象有限检验的结论成立. 这同时也说明，对于给定的区间对象，这里所给的条件仍是保守的. 如何针对给定区间对象得到有限条件将是一个有实际意义的问题.

参 考 文 献

[1] Hollot C V *et al.* Extreme point results for robust stabilization of interval plants with first order compensators. Proc. Amer. Contr. Conf., 1990.

[2] Hollot C V, Yang F. Robust stabilization of interval plants using lead or lag compensators. *Syst. & Contr. Lett.*, 1990, **14**(1):9—12.

[3] Barmish R, Kang H I. Extreme point results for robust stability of interval plants: beyond first order compensators. *Automatica*, 1992, **28**:1169—1180.

[4] 顾冬梅. 具有结构式不确定性的线性反馈控制系统的鲁棒稳定性. 自动化学报, 1993. **19**(1):86—89.

[5] Rantzer A. Stability conditions for polytopes of polynomials. *IEEE Tr. Auto. Contr.*, 1992, **37**:79—84.

[6] 数学手册. 北京：人民教育出版社, 1979, 97—98.

FINITE ROBUST STABILITY CHECKING FOR INTERVAL SYSTEMS

TIAN YUPING FENG CHUNBO

(*Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing* 210018)

Abstract In this paper the problem of the robust stabilizability of interval plants under a fixed compensator is studied. Based on the Sturm criterion some necessary and sufficient conditions of robust stability of closed-loop interval systems are obtained.

Key words Robust stabilization, interval systems, finite checking.