第23卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 23, No. 5
1997年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1997

短 文

引用广义保持器的采样系统——结构性质与自适应鲁棒控制[1)]

蔚润义 江 弘
(北京化工大学自动化系 北京 100029)

摘要 研究一类线性时变不确定系统的采样控制. 分析了采用的广义保持器和离散化系统的结构性质,提出了考虑微处理器主频和字长的自适应鲁棒采样控制方案,证明了闭环系统的稳定性. 针对倒摆系统进行了计算机仿真研究.

关键词 不确定系统, 采样控制, 广义保持器, 自适应鲁棒控制, 倒摆系统.

1 引 言

近年来,引用非周期采样器和/或广义保持器的采样控制系统的研究取得了很大的进展[1]. 本文讨论文献[3,4]提出的广义保持函数的性质及其对离散系统结构的影响,并结合微处理器主频和字长,研究自适应鲁棒采样控制的实施问题. 对于一类具有结构不确定性的线性时变系统,本文提出的控制方案可以根据系统的运行状态,自动调整采样间隔和增益参数,使闭环采样控制系统稳定,并研究了上述方法在倒摆系统中的应用. 限于篇幅,省略了大部分结论的证明.

2 问题的陈述

考虑单输入时变不确定系统

$$\mathscr{S}_c: \dot{\boldsymbol{x}}(t) = [A + \Delta(t)]\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t) \in \boldsymbol{R}^n$ 为系统的状态, $u(t) \in \boldsymbol{R}$ 输入; $A, \boldsymbol{b}$ 为适当维数的常矩阵, $\Delta(t)$ 表示不确定性. 假定标称系统

$$\mathscr{S}_{cn}: \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \tag{2}$$

可控且具有形式

1) 国家自然科学基金、中科院系统控制开放实验室资助项目. 部分内容曾在1996中国控制与决策学术年会上宣读.

收稿日期 1996-02-05

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \tag{3}$$

其中 $\alpha_l(l=1,2,\cdots,n)$为常数,并设 $\Delta(t)$具有下三角结构,即 $\Delta(t)=(\delta_{pq}(t)),\delta_{pq}=0,p<q$. 设 $\delta_{pq}(t),p\geq q$ 及其 $l(l=1,\cdots,n-1)$阶导数均有界. 可以证明,$\Delta(t)$的这一结构是能实现鲁棒控制的最一般的结构.

本文要解决的问题是,对不确定性系统(1),设计采样控制器及自适应控制规律,使闭环系统鲁棒稳定.

3　结构性质与鲁棒稳定性分析

对连续系统 $\mathscr{S}_c$ 进行采样,设采样时间序列为$\{t_m\}(m=1,2,\cdots)$满足$\lim\limits_{m\to\infty}t_m=\infty$, 且第 m 次采样间隔 $T_m=t_{m+1}-t_m>0$. 引入广义保持函数 $\boldsymbol{h}(t)\in\boldsymbol{R}^{1\times n}$,并设计数字控制器 $C(z)$, 便构成如图1所示的采样控制系统. 其中 $u(t)=\boldsymbol{h}(t-t_m)\boldsymbol{v}_m,t_m\leq t<t_{m+1}$.

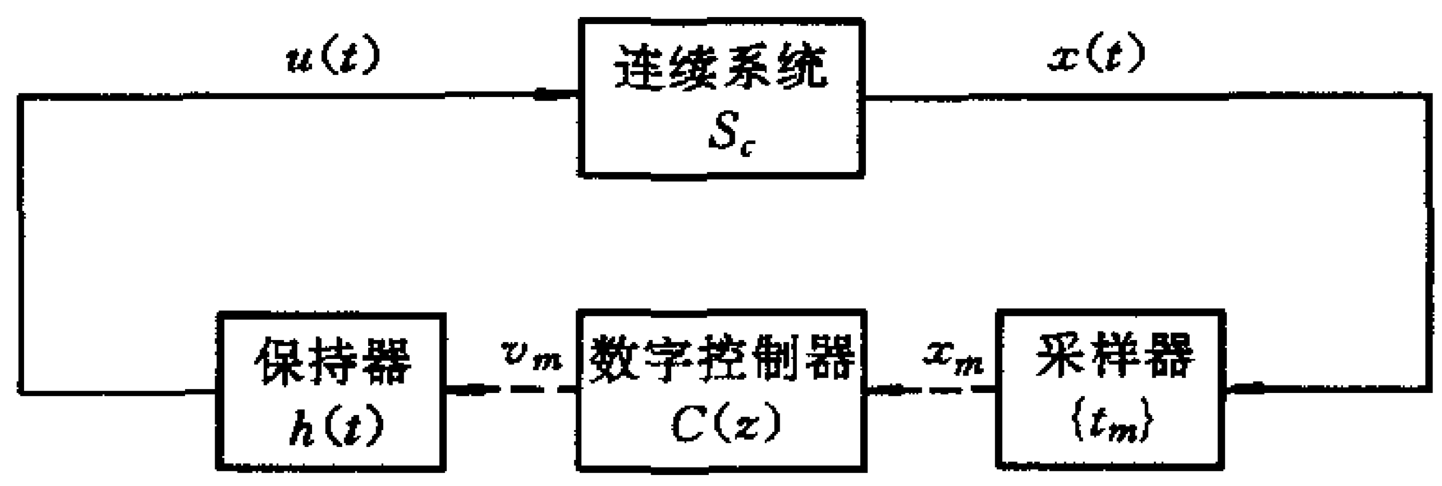

图1　采样控制系统结构框图

周期采样时($T_m\equiv T>0(m=1,2,\cdots)$),标称系统(2)离散化后的状态方程为

$$\mathscr{S}_d:\boldsymbol{x}_{m+1}=A_d\boldsymbol{x}_m+B_d\boldsymbol{v}_m, \tag{4}$$

其中　$\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{x}(t_m),A_d=\exp(AT),B_d=\int_0^T\exp[A(t-\tau)]\boldsymbol{b}\boldsymbol{h}(\tau)\mathrm{d}\tau$(与 $\boldsymbol{h}(t)$ 有关).

记 $\mu_l(l=1,2,\cdots,n)$为 n 个互异的正数. 文献[3,4]分别设计了如下的广义保持器:

广义保持函数1

$$\boldsymbol{h}^1(t,\gamma)=\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}(\gamma)\exp\{[A_0+\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}(\gamma)]t\}, \tag{5}$$

其中　γ 是一增益参数; A_0与式(3)中 A 完全相同, 只是最后一行全为零;$\boldsymbol{k}(\gamma)\in\boldsymbol{R}^{n\times1}$使 $\sigma(A_0+\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}(\gamma))=\{-\mu_l\gamma,l=1,2,\cdots,n\}$;

广义保持函数2

$$\boldsymbol{h}^2(t,\gamma)=[h_n(t,\gamma)\cdots h_2(t,\gamma)h_1(t,\gamma)], \tag{6}$$

其中　$h_l(t,\gamma)=-\gamma^l\sum_{r=1}^{l}\alpha_{lr}e^{-\mu_r\gamma t},l=1,2,\cdots,n;\alpha_{lr}(l=1,2,\cdots,n;r=1,2,\cdots,l)$为以下线性方程组

$$\begin{bmatrix}\mu_1^{-1} & \mu_2^{-1} & \cdots & \mu_l^{-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \mu_1^{-l+1} & \mu_2^{-l+1} & \cdots & \mu_l^{-l+1}\\ \mu_1^{-l} & \mu_2^{-l} & \cdots & \mu_l^{-l}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{l1}\\ \vdots\\ \alpha_{l,l-1}\\ \alpha_{ll}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ (-1)^l\end{bmatrix} \tag{7}$$

的解. 因 μ_l 互不相同, 这些解是唯一存在的.

引理1. 当 $\gamma\to\infty$时,$\boldsymbol{h}^1(t,\gamma)$的元素 $h_{ij}^1(t,\gamma)$趋近于1,2,…,n 阶脉冲函数的线性组合;$\boldsymbol{h}^2(t,\gamma)$的元素 $h_l(t,\gamma)$趋近于 l 阶脉冲函数 .

引理2. 广义保持函数 $\boldsymbol{h}^1(t,\gamma),\boldsymbol{h}^2(t,\gamma)$的传递函数分别为

$$H^1(s) = \boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}(\gamma)[A_0 + \boldsymbol{bk}^{\mathrm{T}}(\gamma)]^{-1}\exp[(A_0 + \boldsymbol{bk}^{\mathrm{T}}(\gamma) - sI)T], \tag{8}$$

$$H^2(s) = [H_n(s)\cdots H_2(s)H_1(s)], \tag{9}$$

其中 $H_l(s)=\gamma^l\sum_{r=1}^{l}\alpha_{lr}(s+\mu_r\gamma)^{-1}[1-\mathrm{e}^{-(s+\mu_r\gamma)T}]$，且 $H^1(s)$和 $H^2(s)$均无传输零点.

引理3. 任选上面的广义保持器，离散系统(4)可控(可镇定)的充分条件为$(A,\boldsymbol{b})$可控(可镇定)，且对任意 $\lambda_i,\lambda_l\in\sigma(A)\cap C^+$，有 $\lambda_i-\lambda_l\neq 2p\pi\mathrm{j}/T$，其中$C^+$表示右半闭平面，$p$ 为任意整数，j 为虚数单位.

引理4. 任选上面的广义保持器，记 $\lambda(\gamma)$为标称离散系统(4)引入单位状态反馈 $\boldsymbol{v}_m=\boldsymbol{x}_m$ 后闭环系统的极点，则$\lim\limits_{\gamma\to\infty}\|\lambda(\gamma)\|=0$.

引入反馈控制 $u(t)=\boldsymbol{h}(t-t_m,\gamma_m)\boldsymbol{v}_m,\boldsymbol{v}_m=\boldsymbol{x}_m$ 后，不确定采样控制系统(1)为

$$\mathscr{S}_s:\dot{\boldsymbol{x}}(t) = [A + \Delta(t)]\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{bh}(t - t_m,\gamma_m)\boldsymbol{x}(t_m),\ t_m \leq t < t_{m+1}. \tag{10}$$

相应的闭环离散系统方程为

$$\mathscr{S}_d:\boldsymbol{x}(t_{m+1}) = \Phi_d(t_{m+1},t_m,\gamma_m)\boldsymbol{x}(t_m), \tag{11}$$

其中 $\Phi_d(t_{m+1},t_m,\gamma_m)=\Phi(t,t_m)+\int_{t_m}^{t_{m+1}}\Phi(t,\tau)\boldsymbol{bh}(\tau\text{-}t_m,\gamma_m)\mathrm{d}\tau$，$\Phi(t,t_m)$为系统(1)的状态转移矩阵(与 $\Delta(t)$有关).

定理1. 任取广义保持器如上，对任意$0<\varepsilon<1$，存在常数 $T^*>0$，$\gamma^*>0,M>0$，使当 $\gamma_m\geq\gamma^*$，$0<T_m\leq T^*$，$m\in\boldsymbol{Z}_+$，$\mathscr{S}_s$ 稳定，$\mathscr{S}_d$ 指数稳定，且

$$\|\boldsymbol{x}(t_m)\| \leq M\varepsilon^m\|\boldsymbol{x}(t_0)\|, \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{Z}_+$为自然数集合.

4 自适应规律

在采样控制系统中，作为控制器的微处理器有主频(记为 f^0)和字长(记为 N)的限制. 这样，即使不考虑完成数据采集、处理、输出所需的时间，采样间隔也只能是 $T^0=1/f^0$ 的整数倍. 同样，增益参数只能是 $\gamma^0=\dfrac{\Gamma}{2^N}$的整数倍，其中 $\Gamma\in\boldsymbol{R}$ 表示增益的上限. 在控制系统设计时，一般总是比较保守地选取微处理器，可设 $T^0\ll T^*$，$\Gamma\gg\gamma^*$.

当不确定性函数 $\Delta(t)$及其导数的变化范围未知，或在系统不同的操作条件下它们的变化范围较大时，希望系统能够根据运行情况自动调整采样间隔 T_m 和广义保持器 $\boldsymbol{h}(t-t_m,\gamma_m)$中的增益参数 γ_m，不致于太小或太大. 因此，设计如下的自适应规律：

$$T_{m+1} = \mathrm{floor}\left[\frac{1}{T^0(\sigma_T\|\boldsymbol{x}(t_m)\| + T_m^{-1})}\right]T^0, T(t_0) = T_0 \gg T^0, \tag{13}$$

$$\gamma_{m+1} = \gamma_m + \mathrm{ceil}\left(\frac{\sigma_\gamma\|\boldsymbol{x}(t_m)\|}{\gamma^0}\right)\gamma^0,\ \gamma(t_0) = \gamma_0 \ll \Gamma, \tag{14}$$

其中 floor(.)，ceil(.)分别表示向下和向上取整. $\sigma_T,\sigma_\gamma,T_0,\gamma_0>0$为取定的正数. 这样，连续系统(1)，采样器$\{t_m\}$，广义保持器(5)(或(6))，自适应规律(13)，(14)便组成了自适应鲁棒采样控制系统. 其渐近稳定性质下面的定理给出：

定理2. 记在初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，$T_0,\gamma_0$下上述闭环采样系统的解为 $\boldsymbol{x}_A(t;\ \boldsymbol{x}_0,\ T_0,\gamma_0)=(\boldsymbol{x}(t),T_m,\gamma_m)$，则 $\boldsymbol{x}_A(t;\boldsymbol{x}_0,\ T_0,\gamma_0)$有界，且

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t) = 0,\ \lim_{m\to\infty}T_m = T_\infty,\ \lim_{m\to\infty}\gamma_m = \gamma_\infty. \tag{15}$$

证明. 设 T^*，γ^* 为定理1中给出的参数，且选择数字控制器使 $T^0<T^*$，$\Gamma>\gamma^*$. 记 $T_m=p_mT^0$，$\gamma_m=q_m\gamma^0$，其中 $p_m,q_m\in \mathbf{Z}_+$，则有

$$p_{m+1}=\operatorname{floor}\left[\frac{p_m}{1+\sigma^T\|\boldsymbol{x}(t_m)\|p_mT^0}\right], \tag{16}$$

$$q_{m+1}=q_m+\operatorname{ceil}\left(\frac{\sigma_\gamma\|\boldsymbol{x}(t_m)\|}{\gamma^0}\right). \tag{17}$$

显然 $p_{m+1}\le p_m$，$q_{m+1}\ge q_m$. 根据定理1，并利用 T_m，γ_m，p_m，q_m 的单调性质和 p_m，q_m 的整数性质，可分下列三种情况完成证明：

1) 存在 $m_T,m_\gamma\in\mathbf{Z}_+$，使 $T_{mT}\le T^*$ 且 $\gamma_{m_\gamma}\ge\gamma^*$；

2) 对任意 $m\in\mathbf{Z}_+$，均有 $T_m>T^*$；

3) 对任意 $m\in\mathbf{Z}_+$，均有 $\gamma_m<\gamma^*$.

在采样控制系统设计时，可以利用标称系统的参数来简化设计并改善系统过渡过程.

5 应用

研究小车上倒摆系统的采样控制. 该系统的动力学方程为[4]

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=\frac{g\sin x_1+\cos x_1\left(\dfrac{-F-mlx_2^2\sin x_1}{m_c+m}\right)}{l\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{m\cos^2x_1}{m_c+m}\right)}, \tag{18),(19}$$

其中 x_1，x_2 分别为倒摆偏离垂直直线的角度和角速度，F 为控制力，g 是重力加速度，m_c，m 分别为小车和倒摆的质量，l 为倒摆的有效长度.

根据该系统的线性化系统，可设计自适应采样控制(取广义保持函数2)

$$\begin{aligned}F(t)=&-\gamma_m e^{-\gamma_m(t-t_m)}x_1(t_m)-\gamma_m^2[2e^{-rm(t-t_m)}-4e^{-2rm(t-t_m)}]x_2(t_m),\\&t_m\le t<t_{m+1},m=0,1,2,\cdots.\end{aligned} \tag{20}$$

γ_m，T_m 根据自适应规律(13)，(14)调整，其中 $\|\boldsymbol{x}(t_m)\|=[x_1^2(t_m)+x_2^2(t_m)]^{\frac{1}{2}}$. 参数 σ_T，σ_γ 用来调节过渡过程. 在计算仿真中，取 $m_c=1.0$kg，$m=0.1$kg，$l=0.5$m；$\sigma_T=1$，$\sigma_\gamma=0.5$，$T^0=0.001$，$\gamma^0=40/2^{10}$.

应用 MATLAB 就不同初始条件和调节参数 σ_T，σ_γ 的仿真结果表明：1) 上述的采样控制方案可以实现倒摆系统的镇定，但对控制力的要求较高，这可能是引入广义保持器及高增益反馈的弱点，值得进一步研究；2) 初始偏转角越大，γ_∞ 越大，T_∞ 越小；3) σ_T，σ_γ 对系统的过渡过程有较大影响；4) 如果利用了系统参数的近似值，过渡过程可得到一定的改善.

参 考 文 献

[1] Araki M. Recent developments in digital control theory, In: Proc. of 12th IFAC Congress, Sydney, 1993.

[2] Kambamba P T. control of linear systems using generalized sampled-data hold function, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1987, **AC-32**: 772—783.

[3] Ocah O, Sezer M E. Robust sampled-data control. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1992, **AC-37**: 1591—1597.

[4] Yu R, Ocah O, Sezer M E. Adaptive robust sampled-data control of a class of systems under structural perturbations. *IEEEE Trans. Automat. Contr.*, 1993, **AC-38**:1707—1713.

[5] Middleton R, Freudenburg J. Non-pathological sampling for generalized sampled-data hold functions, *Automatica*, 1995, **31**:315—319.

[6] Kim J *et al*. Designing fuzzy net controllers using genectic algorithms, *IEEE Control Systems Magazine*, 1995, **15**:66—72.

SAMPLED-DATA SYSTEMS WITH GENERALIZED HOLDERS ——STRUCTURAL PROPERTIES AND ADAPTIVE ROBUST CONTROL

YU RUNYI JIANG HONG

(*Department of Automation, Beijing University of Chemical Technology, Beijing* 100029)

Abstract This paper studies sampled-data control problem for a class of linear time-varying systems. The properties of the generalized holders and the discretized systems are analyzed. An adaptive robust sampled-data control scheme is presented with considerations of colck frequency and word length of the microprocessor. The stability of the closed-loop systems is proved. Simulation results are given for an inverted pendulum system.

Key words Uncertain systems, sampled-data control, generalized holder, adaptive robust control, inverted pendulum.

(上接第677页)

九、来稿格式及要求：

1. 来稿要求论点明确，论证严格，语言通顺，文字简练. 一般定稿时论文尽量不超过5000字；短文不超过3000字；其它形式文章视具体内容由编辑部决定.

2. 论文和短文的文章结构请参照本刊近期发表的文章格式，论文摘要限制在200字左右，其内容包括研究目的、方法、结果和结论等. 文中非标准缩写词（中文或英文）须在首次出现时定义清楚，公式、图、表均须分别用阿拉伯数字全文统一编号.

3. 计量单位一律采用国际单位，即 SI 单位. 名词术语必须规范化、标准化，前后一致. 外国人名、地名、书刊名称除已通用者外一律用原文.

4. 参考文献按文中出现的先后次序排列. 期刊的格式为：[编号]作者（姓在前，如 Wiener L N, Kalmn R E, Wang H 等）. 文章题目. 期刊名（外文可根据国际惯例使用缩写词），年，卷号（期号）：页码顺序编排. 图书的格式为：[编号]作者（姓在前）. 书名. 出版地点：出版者，年份，页码顺序编排. 正文未引用的文献及未公开发表的文献不得列入参考文献栏目.

5. 文末附英文摘要（内容与中文一致）. 摘要包括英文标题、作者姓名和工作单位、文章摘要、关键词. 摘要一般不超过250个单词.

6. 来稿请尽可能打印. 打印稿请用四号字，行间空距不小于7毫米. 手写稿件请用20×20标准稿纸正楷抄写，但其中外文部分必须打印，字体必须工整清晰. 文中符号、大小写等必须清楚.