短 文

一类不确定非线性相似组合系统的结构全息鲁棒控制[1)]

严星刚 高立群 张嗣瀛
(东北大学自动控制系 沈阳 110006)

摘 要 对于参数不确定非线性相似组合大系统，利用增加辅助控制器的方法，设计出易于实现的结构全息鲁棒控制器. 结果表明相似结构能简化系统的分析与设计，相似结构与全息特性密切相关. 最后，仿真算例表明结果的有效性.

关键词 相似组合系统，渐近稳定，鲁棒控制，相关度.

1 引言

非线性组合大系统是复杂系统之一，由于其高维性及非线性特性导致其分析与控制问题相当复杂，但对于具有特定结构的系统，如级联系统[1]，对称系统[2]，相似系统等，可利用其自身的结构属性. 近年来，相似系统的研究已取得了一些成果[3-7]，这类系统有着广泛的实际背景，如自然形成的生物、社会等系统，人们设计的多臂机器人、电力、互联物理等系统[3]. 由于相似系统的良好结构属性，可设计一种控制器，其结构能代表每个控制器的结构信息，利用该控制器通过修正相似参量，即可设计出使整个系统稳定化的鲁棒控制器. 分析表明，相似结构能简化组合系统控制器的工程设计，特别当子系统个数较多时，其优越性更为明显.

2 相似组合系统分析

用 $C^\infty(R^n)$ 表示 R^n 上的 C^∞ 函数集，$Gl(m, C^\infty(R^n))$ 表示 $C^\infty(R^n)$ 上的元素组成的 m 阶非奇异阵集，$V(R^n)$ 表示 R^n 上 C^∞ 向量场集.

考虑不确定系统

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= f_i(x^i) + R_i(x^i, \theta_1) + G_i(x^i)u^i + \Phi_i(x, \theta_2), \\ y^i &= y^i(x^i), \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, N. \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $x^i \in R^n$，$u^i, y^i \in R^m$ 分别是第 i 个子系统的状态，输入和输出，$\theta_1 \in \Omega_1$，$\theta_2 \in \Omega_2$ 是不确定

1) 国家自然科学基金、国家教委博士点基金资助项目.
收稿日期 1995-06-12

参数,$\Omega_1\subset R^{p_1}$,$\Omega_2\subset R^{p_2}$是紧集,$G_i(x^i)=(g_1^i(x^i),\cdots,g_m^i(x^i))$,$f_i(x^i)$,$g_j^i(x^i)\in V(R^n)(i=1,2,\cdots,N,j=1,2,\cdots,m)$,$R_i(x^i,\theta_1)$,$\Phi_i(x,\theta_2)$是光滑或分块光滑的,$\Phi_i(x,\theta_2)$是互联项,不失一般性,设 $f_i(x_0^i)=R_i(x_0^i,\theta_1)=\Phi_i(x_0,\theta_2)=0(\forall\ \theta_1\in\Omega_1,\theta_2\in\Omega_2)$.

定义1. 如果存在 x_0^i某邻域 $\Omega^i(\Omega^i\subset R^n)$上的微分同胚 $z^i=T_i(x^i)$及 $\alpha_i(x^i)\in C^\infty(\Omega^i)$,$\beta_i(x^i)\in Gl(m,C^\infty(\Omega^i))(i=1,2,\cdots,N)$使系统(1)与 $u^i=\alpha_i(x^i)+\beta_i(x^i)v^i$ 组成的闭环系统在 z 坐标下具有如下形式:

$$\dot{z}^i=\tilde{f}_i(z^i)+\tilde{R}_i(z^i,\theta_1)+\tilde{G}_i(z^i)u^i+\tilde{\Phi}_i(z,\theta_2),\tag{2a}$$

$$y^i=y^i(T_i^{-1}(z^i)),\qquad i=1,2,\cdots,N,\tag{2b}$$

其中 $\tilde{R}_i(z^i,\theta_1)=[\frac{\partial T_i}{\partial x^i}R^i(x^i,\theta_1)]_{x^i=T_i^{-1}(z^i)}$, $\tilde{\Phi}_i(z,\theta_2)=[\frac{\partial T_i}{\partial x^i}\Phi_i(x,\theta_2)]_{x^i=T_i^{-1}(z^i)}$,则称系统(1)是 $\Omega=\Omega^1\times\Omega^2\times\cdots\Omega^N$ 上的相似组合系统,并称 T_i,α_i,β_i 为系统(1)的第 i 个子系统的相似参量.

定义2. 如果存在控制器

$$u=u(x,T,\alpha,\beta),\tag{3}$$

使得由 $u^i=u(x,T_i(x^i),\alpha_i(x^i),\beta_i(x^i))$与系统(1)构成的闭环系统在 x_0点渐近稳定,则称(3)式为系统(1)的结构全息稳定化控制器,简称全息控制器.

命题1. 若系统(1)的每个孤立子系统在 $x_0(x_0=\mathrm{col}(x_0^1,x_0^2,\cdots,x_0^N))$具有相同的相关度 $r=\{r_1,r_2,\cdots,r_m\}$,且$\sum_{j=1}^{m}r_j=n$,则系统(1)是 x_0某邻域上的组合相似系统.

3　结构全息鲁棒控制

定理1. 设 $E_q^i=Span\{ad_{f_i}^kg_j^i(x^i)\,|\,0\leqslant k\leqslant q,1\leqslant j\leqslant m\}$,$\mathrm{rank}G_i(x_0^i)=m(i=1,2,\cdots,N)$,$\Omega^i$ 是 x_0^i的一个邻域,$\Omega=\Omega^1\times\Omega^2\times\cdots\Omega^N$ 是 x^0的邻域,如果

i)$E_q^i(i=1,2,\cdots,N,\ q=0,1,2,\cdots,n-2)$是 Ω^i 上的非奇异对合分布,$\dim E_{n-1}^i=n(i=1,2,\cdots,N)$且 E_{n-1}^i在 x_0^i非奇异。

ii)对任意的 $x\in\Omega$ 及 $i=1,2,\cdots,N$,

$$R_i(x^i,\theta_1)=G_i(x^i)L^i(x^i,\theta_1),\qquad\theta_1\in\Omega_1,$$

$$\Phi_i(x,\theta_2)=G_i(x^i)H^i(x,\theta_2).\qquad\theta_2\in\Omega_2.$$

则系统(1)在区域 Ω 上存在结构全息鲁棒控制器.

证明. 考虑系统(1),由条件 i)知[8],存在函数 $\lambda_1^i(x^i)$,$\lambda_2^i(x\backslash+i)$,$\cdots$,$\lambda_m^i(x^i)$使系统

$$\dot{x}^i=f_i(x^i)+G_i(x^i)u^i,$$

$$y^i=\lambda^i(x^i),\qquad i=1,2,\cdots,N$$

(这里 $\lambda^i(x^i)=(\lambda_1^i(x^i),\cdots,\lambda_m^i(x^i))$称为伪输出)均具有相同的相关度 $r=\{r_1,r_2,\cdots,r_m\}$,且 $\sum_{j=1}^{m}r_j=n$. 不妨设 $y^i(x^i)=\lambda^i(x^i)$, 且 $y^i(x_0^i)=0$. 由命题1知,系统(1)是相似组合系统,每个孤立子系统的相关度均为 $r=\{r_1,r_2,\cdots,r_m\}$,$(\sum_{j=1}^{m}r_j=n)$,且其相似参量 $T_i,\alpha_i,\beta_i(i=1,2,\cdots,N)$可由文献[8]求出,令 $D=(T_1^{\mathrm{T}},T_2^{\mathrm{T}},\cdots,T_N^{\mathrm{T}}):x\to z$,结合条件 ii)即知,系统(1)与

反馈 $u^i=\alpha_i(x^i)+\beta_i(x^i)v^i$ 组成的闭环系统在 z 坐标下具有如下结构形式[8]

$$\begin{aligned}\dot{z}^i &= \mathrm{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}z^i + \mathrm{diag}\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}(v^i + L^i(T_i^{-1}(z^i),\theta_1) \\ &\quad + H^i(D^{-1}(z),\theta_2)), \\ y^i &= (C_1,C_2,\cdots,C_m)z^i, \qquad i=1,2,\cdots,N,\end{aligned} \tag{4}$$

其中(A_j,B_j)是 Brunovsky 标准型,$C_j=(1\ 0\ \cdots\ 0)_{1\times r_j}$,$(j=1,2,\cdots m)$. 故存在$1\times r_j$ 矩阵 K_j,使 $A_j+B_jK_j$ 是渐近稳定的. 于是对任意的 r_j 阶正定阵 Q_j,下述 Lyapunov 方程有唯一正定解矩阵 P_j,

$$(A_j+B_jK_j)^{\mathrm{T}}P_j + P_j(A_j+B_jK_j) = -Q_j, \qquad j=1,2,\cdots,m. \tag{5}$$

构造全息控制器

$$u = u_a + u_b + u_c, \tag{6}$$

其中

$$u_a=\alpha+\beta KT,$$

$$u_b=\begin{bmatrix}\phi_1(x)\\ \phi_2(x)\\ \vdots\\ \phi_m(x)\end{bmatrix}, \qquad \phi_j(x)=\begin{cases}-\rho_1^j(x), & (T_j)^{\mathrm{T}}P_jB_j>0,\\ \rho_1^j(x), & (T_j)^{\mathrm{T}}P_jB_j\leqslant 0,\end{cases}$$

$$u_c=\begin{bmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\\ \vdots\\ \psi_m(x)\end{bmatrix}, \qquad \psi_j(x)=\begin{cases}-\rho_2^j(x), & (T_j)^{\mathrm{T}}P_jB_j>0,\\ \rho_2^j(x), & (T_j)^{\mathrm{T}}P_jB_j\leqslant 0.\end{cases}$$

这里 $K=\mathrm{diag}\{K_1,K_2,\cdots,K_m\}$,$B_j,P_j,K_j$ 满足(4)式,$\rho_1^j(x)=\max_i\sup_{\theta_1\in\Omega_1}\{L_j^i(x^i,\theta_1)\}$,$\rho_2^j(x)=\max_i\sup_{\theta_2\in\Omega_2}\{H_j^i(x,\theta_2)\}$,$L_j^i(x^i,\theta_1)$. $H_j^i(x,\theta_2)$分别是 $L^i(x^i,\theta_1)$. $H^i(x,\theta_2)$的第 j 个分量,$j=1,2,\cdots,m$,$i=1,2,\cdots,N$.

下证(6)式是(1)式的结合全息鲁棒控制器. 由 ρ_1,ρ_2的结构形式知,只需证

$$u^i = u_a^i + u_b^i + u_c^i, \qquad i=1,2,\cdots,N, \tag{7}$$

与系统(1)构成的闭环系统在 x_0点渐近稳定,其中

$$u_a^i = \alpha_i(x^i) + \beta_i(x^i)KT_i(x^i),$$

$$u_b^i=\begin{bmatrix}\phi_1^i(x)\\ \phi_2^i(x)\\ \vdots\\ \phi_m^i(x)\end{bmatrix}, \qquad \phi_j^i(x)=\begin{cases}-\rho_1^j(x), & (T_j^i)^{\mathrm{T}}P_jB_j>0,\\ \rho_1^j(x), & (T_j^i)^{\mathrm{T}}P_jB_j\leqslant 0,\end{cases}$$

$$u_c=\begin{bmatrix}\psi_1^i(x)\\ \psi_2^i(x)\\ \vdots\\ \psi_m^i(x)\end{bmatrix}, \qquad \psi_j^i(x)=\begin{cases}-\rho_2^j(x), & (T_j^i)^{\mathrm{T}}P_jB_j>0,\\ \rho_2^j(x), & (T_j^i)^{\mathrm{T}}P_jB_j\leqslant 0.\end{cases}$$

其中 $T_i=((T_1^i)^{\mathrm{T}},(T_2^i)^{\mathrm{T}},\cdots,(T_m^i)^{\mathrm{T}})$. 由于微分同胚不影响系统的渐近稳定性,所以,只需证系统

$$\begin{aligned}\dot{z}^i &= \mathrm{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}z^i + \mathrm{diag}\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}(\mathrm{diag}\{K_1,K_2,\cdots,K_m\}z^i \\ &\quad + [u_b^i(x) + u_c^i(x) + L^i(x^i,\theta_1) + H^i(x,\theta_2)]_{x=D^{-1}(z)}),\quad i=1,2,\cdots,N,\end{aligned} \tag{8}$$

在 $z=0$ 渐近稳定即可.

对系统(8)，构造 Lyapunov 函数

$$V(z) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m}(z^{ij})^{\mathrm{T}}P_j z^{ij}, \tag{9}$$

其中 $z=col(z^1,z^2,\cdots,z^n)$，$z^i=col(z^{i1},z^{i2},\cdots,z^{im})$，$z^{ij}=col(z_1^{ij},z_2^{ij},\cdots,z_{r_j}^{ij})$. 由 P_j 的正定性易知，$V(z)$ 是 $D(\Omega)$ 上的正定函数，且

$$\begin{aligned}\dot{V}|_{(9)} = &-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m}(z^{ij})^{\mathrm{T}}Q_j z^{ij} + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m}\{(z^{ij})^{\mathrm{T}}P_jB_j[u_{bj}^i + u_{cj}^i \\ &+ L_j^i(x^i,\theta_1) + H_j^i(x,\theta_2)]_{x=D^{-1}(z)}\},\end{aligned} \tag{10}$$

其中 u_{bj}^i,u_{cj}^i 分别是 u_b^i,u_c^i 的第 j 个分量，由 $\rho_1(x),\rho_2(x)$ 的定义知，对一切 $i=1,2,\cdots,N$，$j=1,2,\cdots,m$ 有

$$\begin{aligned}&(z^{ij})^{\mathrm{T}}P_jB_j[u_{bj}^i + u_{cj}^i + L_j^i(x^i,\theta_1) + H_j^i(x,\theta_2)]_{x=D^{-1}(z)} \\ &= (T_j^i(x^i))^{\mathrm{T}}P_jB_j[u_{bj}^i + u_{cj}^i + L_j^i(x^i,\theta_1) + H_j^i(x,\theta_2)] \\ &\leqslant \begin{cases}(T_j^i(x^i))^{\mathrm{T}}P_jB_j(u_{bj}^i + \rho_1^j(x) + u_{cj}^i + \rho_2^j(x)), & (T_j^i(x^i))^{\mathrm{T}}P_jB_j > 0, \\ (T_j^i(x^i))^{\mathrm{T}}P_jB_j(u_{bj}^i - \rho_1^j(x) + u_{cj}^i - \rho_2^j(x)), & (T_j^i(x^i))^{\mathrm{T}}P_jB_j \leqslant 0.\end{cases}\end{aligned} \tag{11}$$

由(10)，(11)式及 u_{bj}^i,u_{cj}^i 的定义即知

$$\dot{V}(z) \leqslant -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m}(z^{ij})^{\mathrm{T}}Q_j z^{ij} = -\sum_{i=1}^{N}(z^i)^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_m\}z^i,$$

结合 $Q_j(j=1,2,\cdots,m)$ 的正定性即得 $\dot{V}(z)|_{(8)}$ 负定，所以 $z=0$ 是(8)式的渐近稳定平衡点. 故(6)式是系统(1)的结构全息鲁棒控制器.

注. 从定理证明可看出，u_b^i 和 u_c^i 是为抑制不确定项的扰动引入的辅助控制器. 定理证明是构造性的，它提供了结构全息控制器的设计方案.

4　仿真算例

考虑非线性组合大系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1^1 \\ \dot{x}_2^1 \\ \dot{x}_3^1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-(x_1^1)^2 \\ 0 \\ x_2^1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-x_1^1} & 0 \\ 1 & \mathrm{e}^{x_1^1} \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^1 \\ u_2^1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(x_1^1)^2\sin^2\theta_{22} \\ (x_1^1)^2 e^{x_1^1}\sin^2\theta_{22} + (x_2^2)^2\mathrm{e}^{x_1^1} \\ 0\end{bmatrix}, \tag{12a}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1^2 \\ \dot{x}_2^2 \\ \dot{x}_3^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2^2 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ (x_2^2)^2\sin^2\theta_{11} \\ (x_3^2)^2\theta_{11}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^2 \\ u_2^2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ (x_1^1)^2\mathrm{e}^{x_1^1}\theta_{22}^2 \\ (x_2^2)^2\cos^2\theta_{21}\end{bmatrix}, \tag{12b}$$

$$y^1 = \begin{bmatrix}x_3^1 \\ x_1^1\end{bmatrix},\ y_2 = \begin{bmatrix}x_1^2 \\ x_3^2\end{bmatrix},\ x_0 = 0. \tag{12c}$$

其中 不确定参数的扰动范围为如下的已知集合：

$$\theta_1 = \theta_{11} \in \Omega_1 = \{\theta_{11} \| \theta_{11}| < 2\},$$

$$\theta_2 = (\theta_{21},\theta_{22}) \in \Omega_2 = \{(\theta_{21},\theta_{22}) | \theta_{21} \in R, |\theta_{22}| < 1\}.$$

直接验证知(12)式是相似组合系统，$r=\{2,1\}$，且相似参量可选为

$$T_1:\begin{cases} z_1^1 = x_3^1, \\ z_2^1 = x_2^1, \\ z_3^1 = x_1^1, \end{cases} \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} (x_1^1)^2 e^{x_1^1} \\ -(x_1^1)^2 \end{bmatrix}, \quad \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 & e^{x_1^1} \\ e^{-x_1^1} & 1 \end{bmatrix};$$

$$T_2: z_j^2 = x_j^2,\ (j=1,2,3), \qquad \alpha_2 = 0, \qquad \beta_2 = 1.$$

设定 $K_1=(-2,-2)$，$K_2=-1$，取 $Q_1=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$Q_2=2$，则 $P_1=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，$P_2=1$. 故所求结构全息控制器为

$$u = \alpha + \beta \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} T + \begin{bmatrix} u_{b_1} \\ u_{b_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{c_1} \\ u_{c_2} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

其中

$$u_{b_1} = \begin{cases} -(x_2^2)^2, & (T_1)^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0, \\ (x_2^2)^2, & (T_1)^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leqslant 0, \end{cases} \qquad u_{c_1} = \begin{cases} -(x_1^1)^2 e^{x_1^1}, & (T_1)^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0, \\ (x_1^1)^2 e^{x_1^1}, & (T_1)^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} < 0, \end{cases}$$

$$u_{b_2} = \begin{cases} -2(x_3^2)^2, & T_2 > 0, \\ 2(x_3^2)^2, & T_2 \leqslant 0, \end{cases} \qquad u_{c_2} = \begin{cases} -(x_2^2)^2, & T_2 > 0, \\ (x_2^2)^2, & T_2 \leqslant 0. \end{cases}$$

这里 $T=((T_1)^{\mathrm{T}},T_2)^{\mathrm{T}}$. 引入函数 $\widehat{sgn} = \begin{cases} -1 & x>0, \\ 1, & x\leqslant 0, \end{cases}$ 则使系统(2)在原点镇定的鲁棒控制器为

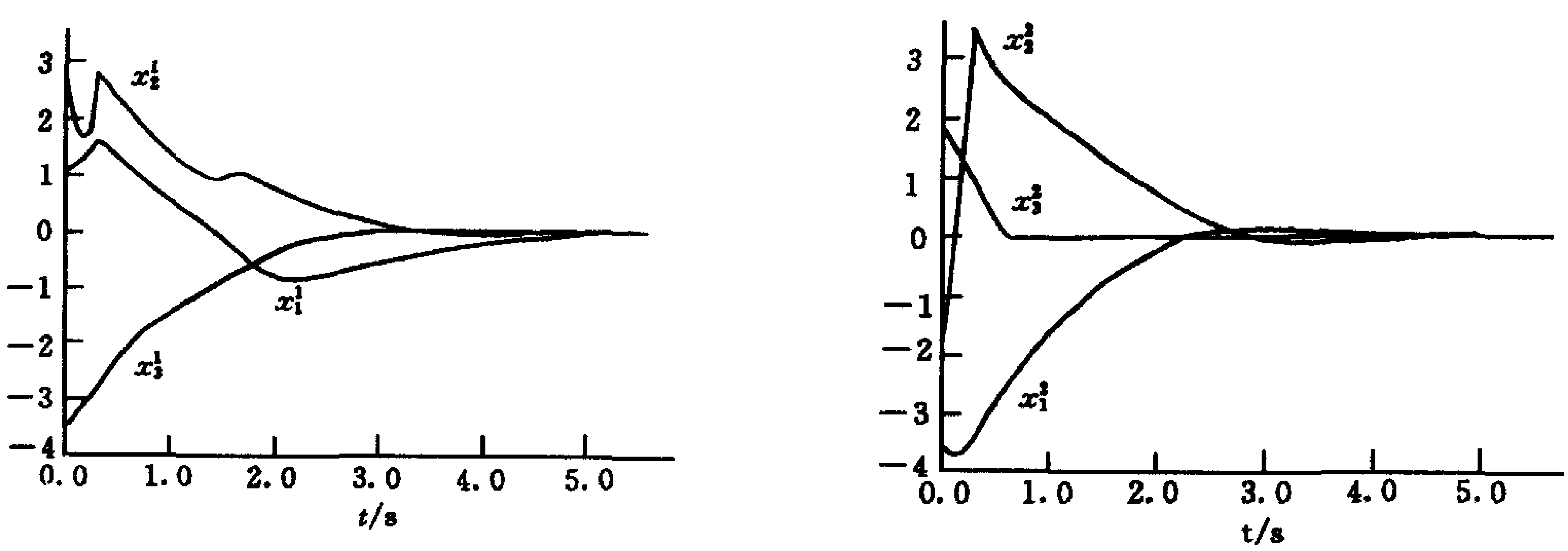
$$u_1^1 = (x_1^1 - 1)x_1^1 e^{x_1^1} + [(x_2^2)^2 + (x_1^1)^2 e^{x_1^1}]\ \widehat{sgn}\ (x_3^1 + x_2^1), \tag{14a}$$

$$u_2^1 = -(x_1^1)^2 - 2(x_3^1 + x_2^1)e^{-x_1^1} + x_1^1 + [2(x_3^2)^2 + (x_2^2)^2]\ \widehat{sgn}\ (x_1^1), \tag{14b}$$

$$u_1^2 = -2[x_1^2 + x_2^2] + [(x_2^2)^2 + (x_1^1)^2 e^{x_1^1}]\ \widehat{sgn}\ (x_1^2 + x_2^2), \tag{14c}$$

$$u_2^2 = -x_3^2 + [2(x_3^2)^2 + (x_2^2)^2]\ \widehat{sgn}\ (x_3^2). \tag{14d}$$

取 $\theta_1=1.5$，$\theta_2=(10,-0.8)$，初值 $x_0=(1,3,-3.5,-3.5,-2.5,2)$，则其响应曲线如图1，仿真结果表明本文的方法是非常有效的.



(a) $x^1=(x_1^1,x_2^1,x_3^1)$的响应曲线.　　(b) $x^2=(x_1^2,x_2^2,x_3^2)$的响应曲线.

图1　系统(12)的状态响应曲线

利用相似组合系统的特定结构，设计出该系统的结构全息鲁棒控制器，展示了相似结

构与全息特性的密切关系.由于相似系统广泛存在于现实世界中,所以,深入研究非线性相似组合大系统不但具有重大的理论意义和现实意义,而且对于复杂巨系统的研究将起到积极的推动作用.

参 考 文 献

[1] Zhihua Qu, Darren M Dawson. Robust control of cascaded and individually feedback linearizable nonlinear systems. *Automatica*, 1994, **30**(6):1057—1064.

[2] Yang Guanghong, Zhang Siying. Stabilizing controllers for uncertain symmetric composite systems. *Automatica*, 1995, **31**(2):337—340.

[3] 张嗣瀛.复杂控制系统的对称性及相似性结构.控制理论与应用,1994,**11**(2):231—237.

[4] Yang Guanghong, Zhang Siying. Structural properties of large-scale systems possessing similar structures. *Automatica*, 1995,**31**(7):1011—1017.

[5] 严星刚等.一类相似组合时变非线性系统的全息稳定化.控制与决策,1996,11(SUPPL. 1):138—143.

[6] Liu Xiaoping. Optimal control problems for large-scale composite systems with similarity. *Control-Theory and Advanced Technology*, 1993, **9**(2):597—606.

[7] 姜斌,刘晓平,张嗣瀛.相似组合非线性系统的输出跟踪.信息与控制,1995,**24**(2):65—70.

[8] Isidori A. Nonlinear Control Systmes, Berlin:Springer-Verlag, 1989.

HOLOGRAPHIC ROBUST CONTROL FOR NONLINEAR SIMILAR COMPOSITE SYSTEMS WITH UNCERTAIN PARAMETERS

YAN XINGGANG　GAO LIQUN　ZHANG SIYING

(*Department of Automatic Control*, *Northeastern University*, *Shenyang*　110006)

Abstract In this paper, by adding auxiliary controllers, a holographic robust stabilizing controller is designed for a class of nonlinear similar composite systems with uncertain parameters. It follows that similar structure can simplify the analysis and design of composite systems and it is closely connected with holographic property. Finally, numerical simulation is presented to illustrate the validity of this paper.

Key words Similar composite systems, asymptotic stability, robust control, relative degree.