第23卷 第5期 自动化学报 Vol. 23, No. 5
1997年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1997

一种基于小波逼近的稳定直接自适应控制算法1)

刘 山 吴铁军
（浙江大学工业控制技术国家重点实验室 杭州 310027）

摘 要 针对一类未知不稳定非线性系统，基于小波逼近理论，提出了一种直接自适应控制算法，并由 Lyapunov 理论证明了整个控制闭环系统的稳定性.

关键词 直接自适应控制，Lyapunov 稳定性，小波逼近.

1 引言

60年代以来，自适应控制理论和设计方法的研究已成为一个十分活跃的重要领域[1,2]. 然而，由于自适应控制系统常常兼有随机、非线性和时变等特性，内部机理相当复杂，分析比较困难[1]. 特别对于非线性系统的自适应控制的研究，大多数方案都是基于线性化处理，远未达到令人满意的程度[2].

80年代中后期迅速兴起的小波(Wavelet)分析理论[3-5]是 Fourier 分析理论的一大突破，弥补了 Fourier 分析方法不能处理信号的局部特性的弱点，为处理非线性系统提供了一种新的强有力的工具，而且物理意义明确，小波理论及其应用研究的日益活跃已引起了控制界的关注[6,7]. 本文采用小波逼近作为直接自适应控制器，结合 Lyapunov 稳定性理论，提出了一种新的不需要进行系统辩识的在线的连续直接自适应控制算法. 对一类未知非线性系统，本文提出的算法能够保证闭环系统的稳定性.

2 问题的描述

在非线性控制领域研究得较多的一类非线性系统是所谓仿射非线性系统，它一般可由下述方程表示

$$x^{(n)}(t)+f(x(t),\dot{x}(t),\cdots,x^{(n-1)}(t))=g(x(t),\dot{x}(t),\cdots,x^{(n-1)}(t))u(t), \tag{1}$$

其中 $u(t)$是控制输入，f,g 是未知非线性函数，且 $f,g\in L^2(R^n)$. 有很大一类非线性控制问题可以表示成或转化成(1)式表示的形式. 记系统的状态为 $\boldsymbol{x}=[x,\dot{x},\cdots,x^{(n-1)}]^{\mathrm{T}}$，期望轨迹为 $\boldsymbol{x}_d=[x_d,\dot{x}_d,\cdots,x_d^{(n-1)}]^{\mathrm{T}}$，控制目标是使状态能够跟踪期望轨迹

定义跟踪误差为

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_d(t).$$

原控制问题即为设计控制律 $u(t)$使得当 $t\to\infty$时，$\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\to 0$.

1)得到国家自然科学基金重点项目和国防科技预研基金资助.
收稿日期 1995-02-07

3　基于小波的直接自适应控制

定义1[3]. 一个函数 $\Psi\in L^2(R^n)$ 称为基本小波函数,如果它满足

$$C_\Psi=\int_{R^n}\frac{|\hat{\Psi}(\mathbf{w})|^2}{|\mathbf{w}|}\mathrm{d}\mathbf{w}<\infty,$$

其中 $\hat{\Psi}$ 是 Ψ 的 Fourier 变换,上述条件等价于

$$\int_{R^n}\Psi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$$

$\Psi(\boldsymbol{x})$ 是一个具有衰减性且在空间域和频率域都是局部非零的紧支函数,它通过伸缩和平移,可以得到一族小波

$$\begin{aligned}\Psi=\{\Psi_{mn}|\Psi_{mn}(\boldsymbol{x})&=\det(D)^{\frac{m}{2}}\Psi(D^m\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t}_n),\boldsymbol{t}_n\in R^k,\\ D&=\mathrm{diag}(\boldsymbol{d}),\boldsymbol{d}\in R_+^k,(m,n)\in Z\}.\end{aligned}\tag{2}$$

适当选取 $\boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{T}_n$,可使上述小波族满足框架条件,即对于任意 $f\in L^2(R^k)$,有

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{\varphi\in\Psi}|<\varphi,f>|\leqslant B\|f\|^2.\tag{3}$$

引理1[3]. 记满足框架条件的小波族的伸缩和平移指标 (m,n) 的集合为 Ω,则对于任意 $f\in L^2(R^n)$,存在框架展开系数 W_{mn},满足

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{(m,n)\in\Omega}W_{mn}\Psi_{mn}(\boldsymbol{x}).\tag{4}$$

这里,$\Psi_{mn}(\boldsymbol{x})=\Psi(D^m\boldsymbol{x}-\boldsymbol{T}_n)$.

定义2[1]. 一个具有实系数的有理传递函数 G,如果对于 $\mathrm{Re}s>0$,有 $\mathrm{Re}G(s)\geqslant0$,那么称 G 为正实(PR)传递函数,如果对于某个实 $\varepsilon<0$,$G(s-\varepsilon)$ 是正实的,则称 G 为严格正实(SPR)传递函数,其中 $\mathrm{Re}s$ 表示 s 的实部.

引理2[1]. 设线性时不变误差模型

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+B(\theta-\theta^0)u_c,\tag{5}$$

$$e=C\boldsymbol{x}\tag{6}$$

的传递函数 G 是严格正实的,G 表示如下:

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B,$$

θ 为输入参数,u_c 为指示信号,那么参数调整律:

$$\dot{\theta}=-ru_ce,\tag{7}$$

使输出误差 e 趋向于零,式中常数 r 为正.

基于引理2,希望找到控制律 $u(t)$,使得跟踪误差 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 的动态方程满足

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=A\tilde{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{b}(\theta-\theta_0),\tag{8}$$

$$y(t)=\boldsymbol{k}^T\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\ ,\tag{9}$$

且 $G(s)=\boldsymbol{k}^T(sI-A)\boldsymbol{b}$ 满足严格正实条件. 实际上,达到这个目的的一个常用的方法是按照下述一阶微分方程[2]

$$\dot{y}(t)=-\lambda_Dy(t)\tag{10}$$

来选取式(8),(9)中的参数 $A,\boldsymbol{b},\boldsymbol{k}$,其中,$\lambda_D$ 为取定的正实数. 下面将利用 Lyapunov 稳定性理论导出一种新的基于小波逼近的直接自适应控制算法.

微分式(9),并由式(1)得到

$$\dot{y}(t)=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}+k_{n-1}(-f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})u(t)-x_d^{(n)}(t)), \tag{11}$$

其中 $\mathbf{c}=[0,k_0,\cdots,k_{n-2}]^T$,注意到 $\mathbf{k}$ 是在设计控制器时选取的.因此,可以令 $k_{n-1}=1$,因此有

$$g^{-1}(\boldsymbol{x})\dot{y}(t)=g^{-1}(\boldsymbol{x})s(t)-g^{-1}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})+u(t), \tag{12}$$

其中 $s(t)=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)-x_d^{(n)}(t)$.令 $h(\boldsymbol{x})=g^{-1}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})$,结合式(10),可设计 $u(t)$

$$u(t)=-\lambda_D y(t)+h(\boldsymbol{x}(t))-g^{-1}(\boldsymbol{x}(t))s(t). \tag{13}$$

由推导可知,这样设计的控制器能够保证控制闭环系统的稳定性.然而,由于系统的模型是未知的,$h(\boldsymbol{x})$和 $g^{-1}(\boldsymbol{x})$也是未知的,因此用小波逼近来代替,并在控制中自适应地调整参数,从而易于在实际中应用.

分别考虑 $h(\boldsymbol{x}(t))$和 $g^{-1}(\boldsymbol{x}(t))$的两个小波逼近

$$\hat{h}(\boldsymbol{x})=\sum_{(m,n)\in\Omega}\hat{P}_{mn}\Psi_{mn}(\boldsymbol{x}),\quad \hat{g}^{-1}(\boldsymbol{x})=\sum_{(m,n)\in\Omega}\hat{Q}_{mn}\Psi_{mn}(\boldsymbol{x}). \tag{14),(15}$$

用小波逼近代替(13)式中的 $h(\boldsymbol{x}(t))$和 $g^{-1}(\boldsymbol{x}(t))$,由此可设计控制为

$$u(t)=-\lambda_D y(t)+\hat{h}(\boldsymbol{x}(t))-\hat{g}^{-1}(\boldsymbol{x}(t))s(t). \tag{16}$$

基于小波逼近的直接自适应控制的结构如图1所示.

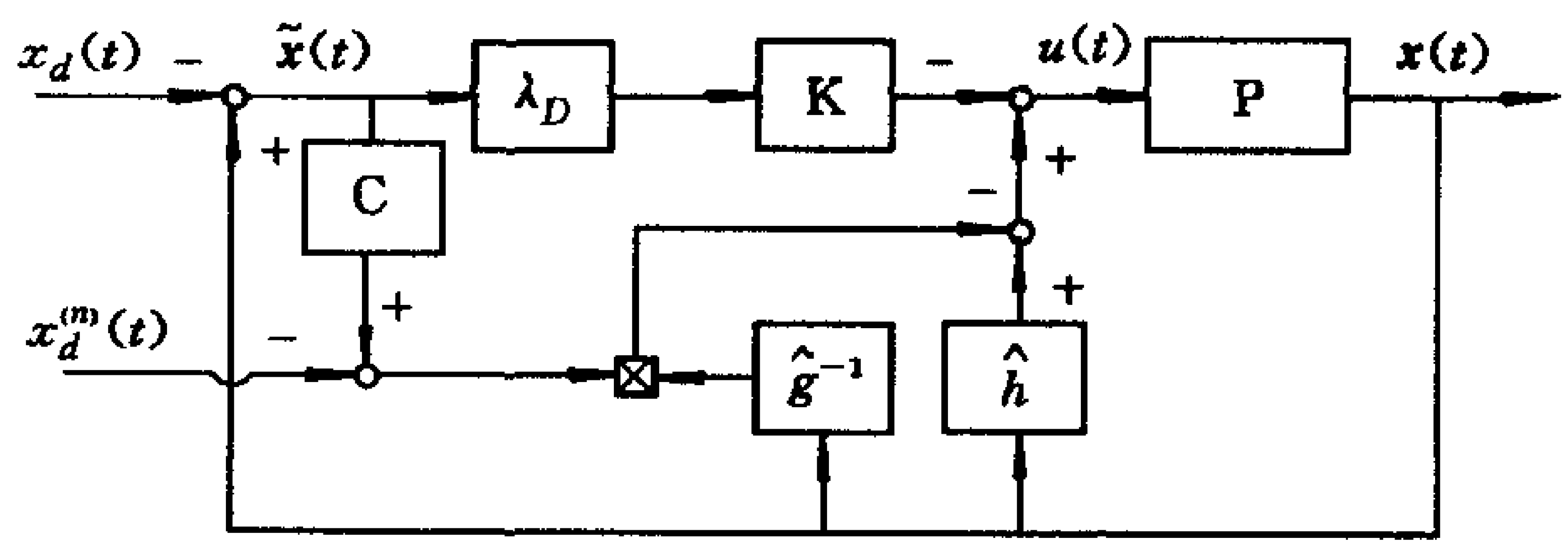

图1 基于小波逼近的直接自适应控制系统

假设 $g^{-1}(\boldsymbol{x})$满足条件

$$|\dot{g}^{-1}|\leqslant M. \tag{17}$$

在控制式(16)中取 λ_D 满足 $\lambda_D>\frac{1}{2}M$.针对上面的控制结构,给出使闭环系统稳定的参数的自适应调整律为

$$\dot{\hat{P}}_{mn}(t)=-\eta_1\Psi_{mn}(\boldsymbol{x}(t))y(t)\ , \tag{18}$$

$$\dot{\hat{Q}}_{mn}(t)=\eta_2\Psi_{mn}(\boldsymbol{x}(t))y(t)s(t)\ , \tag{19}$$

其中 η_1,η_2为正常数,关于该算法的 Lyapunov 稳定性,有如下定理:

定理1. 考虑非线性系统式(1),在假设条件式(17)下,如果控制输入为式(16),参数 $\hat{P}_{mn}$和$\hat{Q}_{mn}$的调整律由式(18),(19)给出,其中 η_1,η_2为调整率,则

1) 该闭环系统是 Lyapunov 渐近稳定的;

2) $\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=0$;

3) $\lim\limits_{t\to\infty}\hat{P}_{mn}(t)$和$\lim\limits_{t\to\infty}\hat{Q}_{mn}(t)$存在且有界.

证明.不失一般性,假设 $g(\boldsymbol{x})>0$.由引理1知,存在 P_{mn}和 Q_{mn}使得

$$h(\boldsymbol{x})=\sum_{(m,n)\in\Omega}P_{mn}\Psi_{mn}(\boldsymbol{x}),\quad g^{-1}(\boldsymbol{x})=\sum_{(m,n)\in\Omega}Q_{mn}\Psi_{mn}(\boldsymbol{x}), \tag{20),(21}$$

取系统的 Lyapunov 函数为

$$V(t)=\frac{1}{2}\Big(g^{-1}(\boldsymbol{x}(t))y^2(t)+\frac{1}{\eta_1}\sum_{(m;n)\in\Omega}\widetilde{P}^2_{mn}(t)+\frac{1}{\eta_2}\sum_{(m,n)\in\Omega}\widetilde{Q}^2_{mn}(t)\Big),\tag{22}$$

其中 $\widetilde{P}_{mn}=\hat{P}_{mn}-P_{mn}$，$\widetilde{Q}_{mn}=\hat{Q}_{mn}-Q_{mn}$. 故有

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)=&\frac{1}{2}\dot{g}^{-1}y^2(t)+g^{-1}y(t)\dot{y}(t)\\&+\frac{1}{\eta_1}\sum_{(m,n)\in\Omega}\widetilde{P}_{mn}(t)\dot{\hat{P}}_{mn}(t)+\frac{1}{\eta_2}\sum_{(m,n)\in\Omega}\widetilde{Q}_{mn}(t)\dot{\hat{Q}}_{mn}(t).\end{aligned}\tag{23}$$

记

$$\tilde{h}(\boldsymbol{x})=\hat{h}(\boldsymbol{x})-h(\boldsymbol{x})=\sum_{(m,n)\in\Omega}\widetilde{P}_{mn}\Psi_{mn}(\boldsymbol{x}),$$

$$\widetilde{g}^{-1}(\boldsymbol{x})=\hat{g}^{-1}(\boldsymbol{x})-g^{-1}(\boldsymbol{x})=\sum_{(m,n)\in\Omega}\widetilde{Q}_{mn}\Psi_{mn}(\boldsymbol{x}).$$

将式(16)代回式(12)，可得

$$g^{-1}\dot{y}(t)=-\lambda_D y(t)-s(t)\widetilde{g}^{-1}+\tilde{h}.\tag{24}$$

将式(24)代入式(23)，有

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)=&\frac{1}{2}y^2(t)(\dot{g}^{-1}-2\lambda_D)+\sum_{(m,n)\in\Omega}\widetilde{P}_{mn}(t)\Big(\frac{1}{\eta_1}\dot{\hat{P}}_{mn}(t)+\Psi_{mn}(\boldsymbol{x})y(t)\Big)\\&+\sum_{(m,n)\in\Omega}\widetilde{Q}_{mn}(t)\Big(\frac{1}{\eta_2}\dot{\hat{Q}}_{mn}(t)-\Psi_{mn}(\boldsymbol{x})y(t)s(t)\Big).\end{aligned}\tag{25}$$

将参数调整律(18)，(19)代入上式，并由条件(17)可以得到

$$\dot{V}(t)\leqslant\frac{1}{2}(M-2\lambda_D)y^2(t)\leqslant 0\ ,\tag{26}$$

由此可知该闭环系统一致渐近稳定.

由闭环系统一致渐近稳定立即可得 $\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{\mathbf{x}}(t)=0$.

由(26)式可得 $\lim\limits_{t\to\infty}\dot{V}(t)=0$，即 V 是有界的，因此由 V 的定义可得 $\lim\limits_{t\to\infty}\hat{P}_{mn}(t)$ 和 $\lim\limits_{t\to\infty}\hat{Q}_{mn}(t)$ 存在且有界. 故定理结论成立.

4　仿真例子

例1. 假设未知的非线性系统由如下的方程决定：

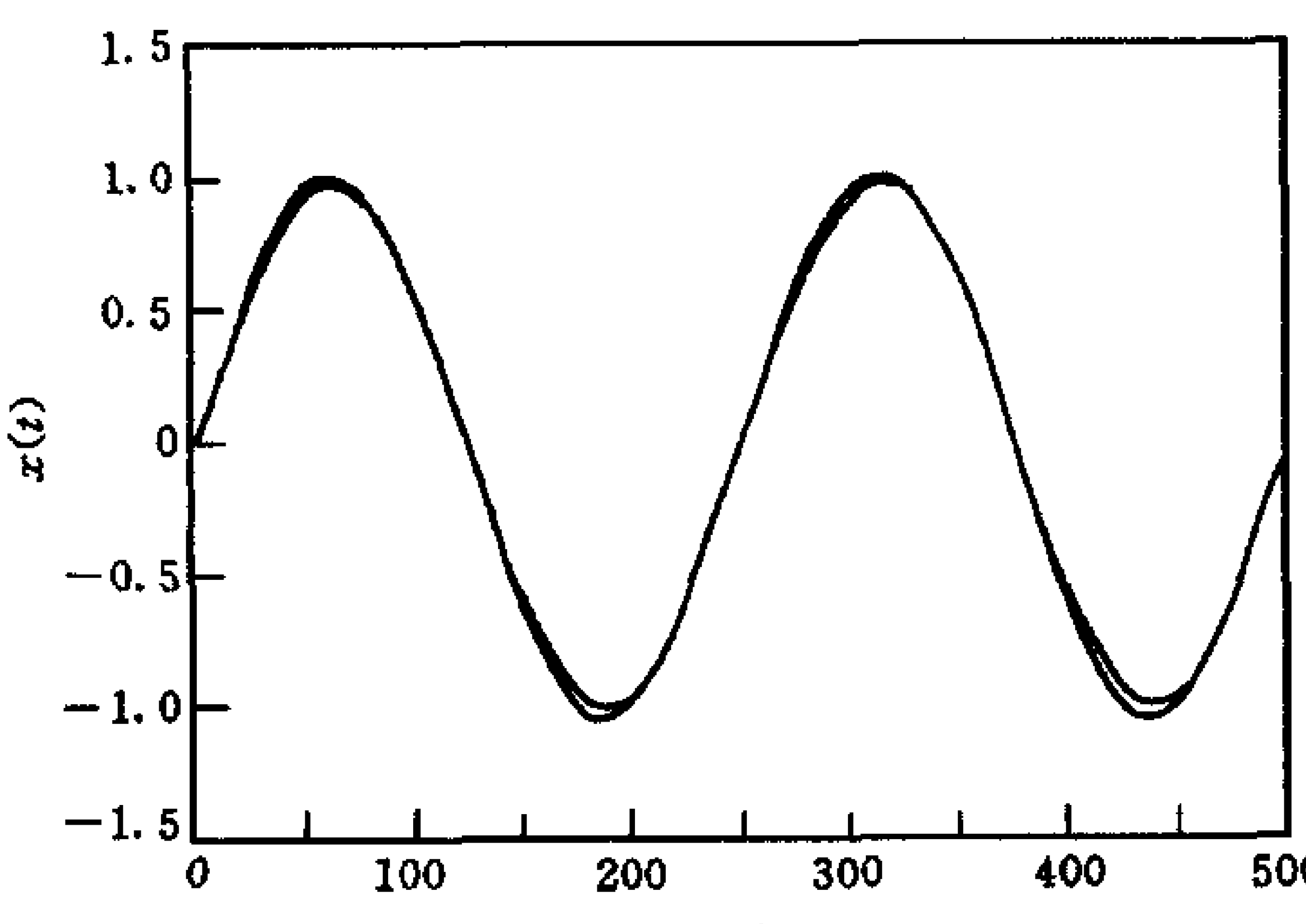

图2　跟踪轨迹为正弦函数时的仿真结果

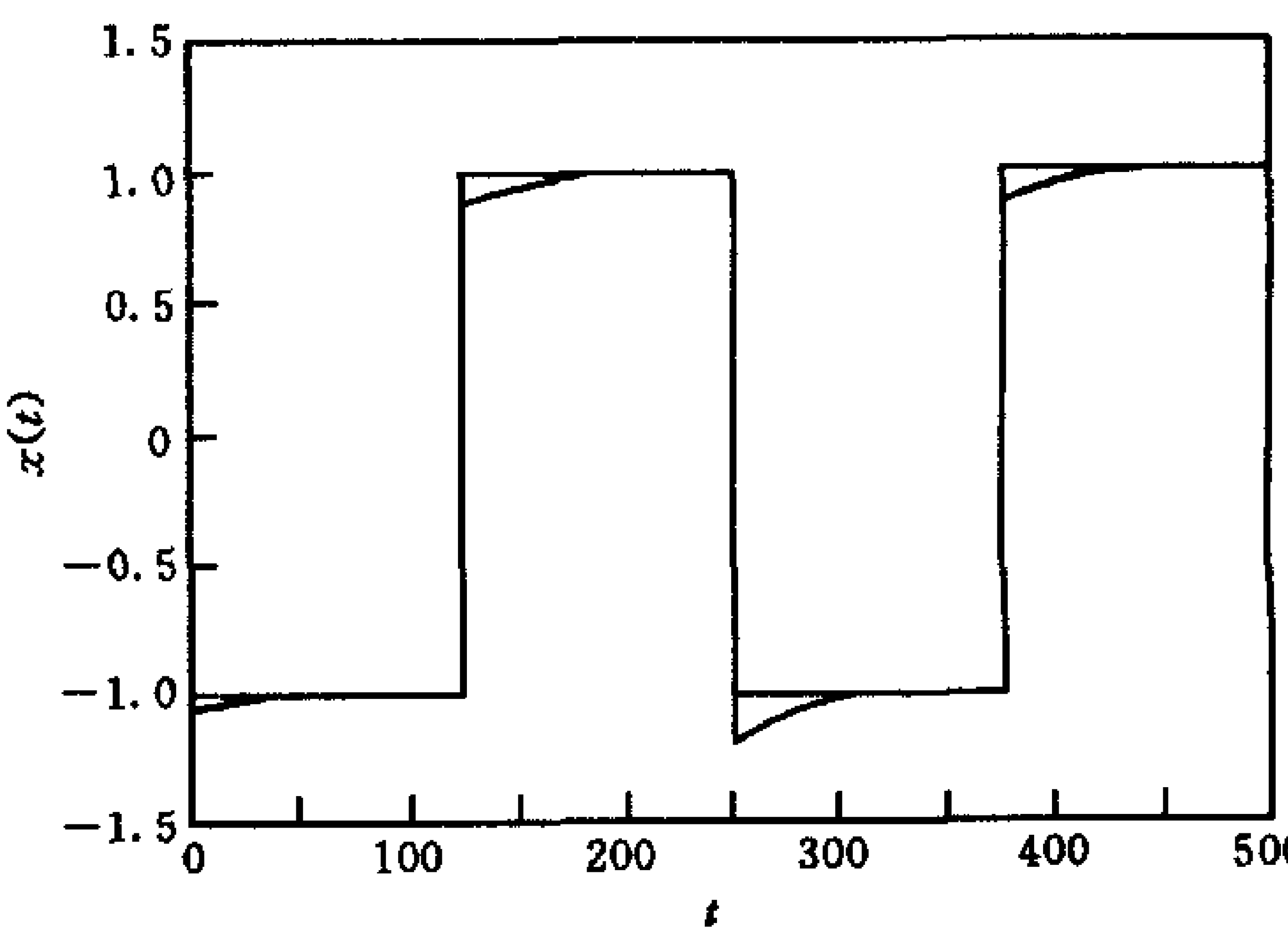

图3　跟踪轨迹为方波时的仿真结果

$$(1+x^2(t))\dot{x}(t)=\sin(x(t))+x(t)\tan(x(t))+(1+x^2(t))u(t). \tag{27}$$

控制的目标是使系统的输出 $x(t)$ 能够跟踪设定的期望轨迹.在仿真中,采用的基本小波函数为

$$\Psi(x)=x\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right). \tag{28}$$

同时,取 $D=2I, \mathbf{T}_n=n, \lambda_D=10, \eta_1=1.0, \eta_2=1.0$,系统的初始状态和逼近参数的初值都是任意的,参考设定值为正弦函数和方波的仿真结果分别如图2和图3所示.

本文提出的基于小波逼近的直接自适应控制算法不需要进行系统辨识,结构简单,易于应用,与一般的自适应控制方法相比,它需要的关于系统的先验知识较少.同时,这种算法是一种在线的连续控制算法,可以用硬件实现.本文对该算法进行的稳定性分析保证了它的实用性.

参 考 文 献

[1] Astrom K J, Wittenmark B. Adaptive Control. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[2] Narendra K S, Annaswamy A M. Stable Adaptive Systems. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.

[3] Daubechies I. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. *IEEE Trans. IT*. 1990, **36**(5):961—1005.

[4] Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Trans. PAMI*. 1989, **11**(7):674—693.

[5] Mallat S. Multifrequency channel decomposition of images and wavelet models. *IEEE Trans. ASSP*. 1989, **37**(12):2091—2109.

[6] Zhang Q, Benveniste A. Wavelets networks. *IEEE Trans. NN*. 1992, **3**(6):889—898.

[7] Elias-Juarez A, Kantor J C. On the application of wavelets to model predictive control. In: Proc. 1992 Automatic Control Conf., Chicago, IL. 1992, 1582—1586.

A WAVELET BASED STABLE DIRECT ADAPTIVE CONTROL APPROACH

LIU SHAN WU TIEJUN

(National Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract Based on the wavelet approximation theory, a novel direct adaptive control algorithm is proposed for a class of nonlinear model-unknown systems. The stability of the closed loop is proved by using Lyapunov theory.

Key words Direct adaptive control, Lyapunov stability, wavelet approximation.

刘 山 1970年生,1992年获中国科技大学应用数学专业理学学士学位,1995年获浙江大学工业自动化专业工学硕士学位.现在浙江大学工业控制技术国家重点实验室工作.目前研究领域为:自适应控制,非线性控制及其在工业过程中的应用.

吴铁军 1950年生,1988年获浙江大学工业自动化专业博士学位.现为该校工业控制技术研究所教授,博士生导师,工业控制技术国家重点实验室副主任.当前研究领域为:智能控制,非线性控制及其在复杂工业过程中的应用.