

稳态 Kalman 滤波器增益新算法¹⁾

邓自立 李建国

(黑龙江大学应用数学研究所 哈尔滨 150080)

摘 要 应用现代时间序列分析方法, 基于 ARMA 新息模型, 提出了稳态 Kalman 滤波器增益的两种简单的新算法, 并证明了它们的等价性. 应用 ARMA 新息模型参数的递推辨识器伴随新算法, 可实现自校正 Kalman 滤波器. 仿真例子说明了其有效性.

关键词 稳态 Kalman 滤波器增益, 自校正 Kalman 滤波器, 现代时间序列分析方法.

1 引 言

估计稳态 Kalman 滤波器增益是一种重要的自适应 Kalman 滤波方法. 已有的稳态 Kalman 滤波器增益算法尚有一定缺点和局限性. 经典的 Kalman 滤波算法^[1]要求解稳态矩阵代数 Riccati 方程, 且要求已知噪声统计. Mehra 的相关分析算法^[2]要求状态转移阵是稳定的. Tajima 算法^[3]仅给出了 Kalman 预报器增益阵算法. 文献[4]的算法简单, 但要求状态转移阵是非奇异的. 本文应用现代时间序列分析方法^[5], 基于 ARMA 新息模型, 提出了稳态 Kalman 滤波器增益的两种新算法, 并证明了它们的等价性. 可处理带相关噪声、带不稳定和/或奇异状态转移阵的系统. 应用 ARMA 新息模型参数的递推辨识器^[6]伴随新算法, 可实现稳态 Kalman 滤波器增益的一致估计, 从而可实现自校正(渐近最优)Kalman 滤波器, 具有较大应用价值.

2 稳态 Kalman 滤波器增益新算法

考虑线性离散随机系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma \mathbf{w}(k), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(k) = H \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k). \quad (2)$$

其中 状态 $\mathbf{x}(k) \in R^n$, 观测 $\mathbf{y}(k) \in R^m$, $\mathbf{w}(k) \in R^r$, $\mathbf{v}(k) \in R^m$, Φ 为状态转移阵, Φ, H, Γ 是适当维数常阵.

假设 1. $\mathbf{w}(k)$ 和 $\mathbf{v}(k)$ 是零均值、方差阵各为 Q_w 和 Q_v 的相关白噪声

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^T(j) & \mathbf{v}^T(j) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_w & S \\ S^T & Q_v \end{bmatrix} \delta_{kj}, \quad (3)$$

其中 $S = E[\mathbf{w}(k)\mathbf{v}^T(k)]$, $\delta_{kj} = 0 (k \neq j)$, $\delta_{kk} = 1$.

1) 黑龙江省自然科学基金资助项目.

收稿日期 1995-03-01

假设 2. 系统(1), (2)是完全可观、完全可控的. 设可观测性指数为 β , 它是使下式成立的最小自然数^[7]

$$\text{rank} \begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ \vdots \\ H\Phi^{\beta-1} \end{bmatrix} = n. \quad (4)$$

可证明^[7] $n/m \leq \beta \leq \min(\mu, n-m+1)$, 其中 μ 是 Φ 的最小多项式的阶.

2.1 ARMA 新息模型

由(1), (2)式有

$$y(k) = H(I_n - q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma w(k-1) + v(k), \quad (5)$$

其中 I_n 是 $n \times n$ 单位阵, q^{-1} 是单位滞后算子, $q^{-1}x(k) = x(k-1)$.

应用推广的矩阵求逆 Fadeeva 公式^[5]

$$(I_n - q^{-1}\Phi)^{-1} = \Lambda(q^{-1})/\varphi(q^{-1}). \quad (6)$$

其中 $q^{\mu}\varphi(q^{-1})$ 是 Φ 的最小多项式, $n_{\varphi} \leq \mu$, 且

$$\varphi(q^{-1}) = 1 + \varphi_1 q^{-1} + \cdots + \varphi_{n_{\varphi}} q^{-n_{\varphi}}, \varphi_{n_{\varphi}} \neq 0, \quad (7)$$

$$\Lambda(q^{-1}) = \Lambda_0 + \Lambda_1 q^{-1} + \cdots + \Lambda_{n_{\lambda}} q^{-n_{\lambda}}, \Lambda_{n_{\lambda}} \neq 0, n_{\lambda} \leq \mu - 1, \quad (8)$$

$$\Lambda_i = \Phi \Lambda_{i-1} + \varphi_i I_n, \Lambda_0 = I_n, \varphi_i = 0 (i > n_{\varphi}), i = 1, 2, \dots, n_{\lambda}. \quad (9)$$

将(6)式代入(5)式有

$$\varphi(q^{-1})y(k) = H\Lambda(q^{-1})\Gamma q^{-1}w(k) + \varphi(q^{-1})v(k). \quad (10)$$

由假设 2 有 $\varphi(q^{-1})$ 与 $H\Lambda(q^{-1})\Gamma$ 无标量多项式因式^[7], 再假设 $(\varphi(q^{-1})I_m, H\Lambda(q^{-1})\Gamma)$ 左素, 且(10)式右边的两个滑动平均(MA)过程之和的谱密度矩阵 $\Phi(e^{i\omega})$ 正定, 即 $\Phi(e^{i\omega}) > 0, -\pi \leq \omega \leq \pi$, 则(10)式右边的两个 MA 过程之和可用一个稳定的、唯一的 MA 过程表示为^[8]

$$D(q^{-1})\varepsilon(k) = B(q^{-1})w(k) + \varphi(q^{-1})v(k). \quad (11)$$

其中 $D(q^{-1}) = I_m + D_1 q^{-1} + \cdots + D_{n_d} q^{-n_d}$ 是稳定的, 即 $\det D(q)$ 的零点在单位圆外, $\varepsilon(k)$ 是零均值、方差阵为 Q_{ε} 的白噪声, $n_d = \max(n_{\varphi}, n_b - i_0)$, 且记

$$B(q^{-1}) \triangleq H\Lambda(q^{-1})\Gamma q^{-1} = B_{i_0} q^{-i_0} + \cdots + B_{n_b} q^{-n_b}, B_{i_0} \neq 0, i_0 \geq 1, B_{n_b} \neq 0. \quad (12)$$

由(10), (11)式有 ARMA 模型

$$\varphi(q^{-1})y(k) = D(q^{-1})\varepsilon(k). \quad (13)$$

由(11)式右边的 MA 过程可计算 $D(q^{-1})\varepsilon(k)$ 的相关函数, 然后可用 Gevers-Wouters 算法^[9]求 $D(q^{-1})$ 和 Q_{ε} .

在(13)式中取常(非随机)初值 $(\varepsilon(-i), y(-j)), i=1, \dots, n_d; j=1, \dots, n_{\varphi}$, 则当 $k \geq 0$ 时, 由递推关系式(13), $\varepsilon(k)$ 可由 $(c, y(0), \dots, y(k))$ 线性表示, 其中 c 为常向量, 反之, $y(k)$ 亦可由 $(c, \varepsilon(0), \dots, \varepsilon(k))$ 线性表示. 因而由 $(c, y(0), \dots, y(k-1))$ 与 $(c, \varepsilon(0), \dots, \varepsilon(k-1))$ 张成相同的线性空间 L . 取(13)式两边各项到线性空间 L 上的射影, 由白噪声 $\varepsilon(k)$ 的正交性和射影性质^[1], 有 $y(k)$ 的一步最优预报器 $\hat{y}(k|k-1)$ 为

$$\begin{aligned} \hat{y}(k|k-1) = & -\varphi_1 y(k-1) - \cdots - \varphi_{n_{\varphi}} y(k-n_{\varphi}) + D_1 \varepsilon(k-1) \\ & + \cdots + D_{n_d} \varepsilon(k-n_d). \end{aligned} \quad (14)$$

将(13), (14)式相减得到 $\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k|k-1)$, 即 $\varepsilon(k)$ 是 $y(k)$ 的新息过程^[1], 故称(13)式为 ARMA 新息模型. 由 $D(q^{-1})$ 的稳定性可证明^[10] 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 由(13)式计算 $\varepsilon(k)$ 将渐近地不依赖于它的初值选取.

2.2 稳态 Kalman 滤波器增益的两种新算法

引理 1. 由(9)式定义的 Λ_i 具有如下性质:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} H \\ H\Lambda_1 \\ \vdots \\ H\Lambda_{\beta-1} \end{bmatrix} = n. \quad (15)$$

证明. 由(9)式迭代有关系式

$$\begin{bmatrix} H \\ H\Lambda_1 \\ \vdots \\ H\Lambda_{\beta-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_1 I_m & I_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \varphi_{\beta-1} I_m & \cdots & \varphi_1 I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ H\Phi_1 \\ \vdots \\ H\Phi^{\beta-1} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

(16)式右边是一个非异方阵与可观测性阵的乘积, 由(4)式引出(15)式.

定理 1. 系统(1), (2)在假设 1 和假设 2 下, 稳态 Kalman 滤波器为

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K_f \varepsilon(k+1), \quad (17)$$

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi \hat{x}(k|k-1) + K_p \varepsilon(k), \quad (18)$$

$$\varepsilon(k) = y(k) - H \hat{x}(k|k-1). \quad (19)$$

其中可任取初值 $\hat{x}(0|0)$, 且稳态 Kalman 滤波器增益 K_f 和稳态 Kalman 预报器增益 K_p 分别为

$$K_f = \begin{bmatrix} H \\ H\Lambda_1 \\ \vdots \\ H\Lambda_{\beta-1} \end{bmatrix}^\# \begin{bmatrix} I_m - M_2 \\ D_1 - HM_1 - \varphi_1 M_2 \\ \vdots \\ D_{\beta-1} - H\Lambda_{\beta-2} M_1 - \varphi_{\beta-1} M_2 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

和

$$K_p = \Phi K_f + \Gamma S Q_\varepsilon^{-1}. \quad (21)$$

其中 D_i, φ_i 由(13)式给出, Λ_i 由(9)式给出, 且定义 $D_i = 0 (i > n_d)$,

$$M_1 = \Gamma S Q_\varepsilon^{-1}, \quad M_2 = Q_v Q_\varepsilon^{-1}, \quad (22)$$

且 $\Omega = [H^T, (H\Lambda_1)^T, \dots, (H\Lambda_{\beta-1})^T]^T$ 的伪逆 $\Omega^\# = (\Omega^T \Omega)^{-1} \Omega^T$.

证明. 由假设 2 稳态 Kalman 滤波器存在^[5]. 由(1), (2)式及射影性质^[1] 有(17), (19), (23)式.

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi \hat{x}(k|k) + \Gamma \hat{w}(k|k). \quad (23)$$

由(11)式、假设 1 和射影公式^[1] 有白噪声滤波器为

$$\hat{w}(k|k) = \sum_{i=0}^k E[w(k) \varepsilon^T(i)] Q_\varepsilon^{-1} \varepsilon(i) = S Q_\varepsilon^{-1} \varepsilon(k). \quad (24)$$

将(23), (24)式代入(17)式有

$$\hat{x}(k|k) = \Phi \hat{x}(k-1|k-1) + \Gamma S Q_\varepsilon^{-1} \varepsilon(k-1) + K_f \varepsilon(k). \quad (25)$$

由(2)式和射影性质有

$$y(k) = H\hat{x}(k|k) + \hat{v}(k|k). \quad (26)$$

应用(11)式、假设 1 和射影公式有

$$\hat{v}(k|k) = \sum_{i=0}^k E[v(k)\varepsilon^T(i)]Q_\varepsilon^{-1}\varepsilon(i) = Q_v Q_\varepsilon^{-1}\varepsilon(k). \quad (27)$$

由(22), (25)–(27)式可得到

$$y(k) = H(I_n - q^{-1}\Phi)^{-1}[M_1\varepsilon(k-1) + K_f\varepsilon(k)] + M_2\varepsilon(k). \quad (28)$$

将(6)式代入(28)式得 ARMA 新息模型

$$\varphi(q^{-1})y(k) = H\Lambda(q^{-1})M_1\varepsilon(k-1) + H\Lambda(q^{-1})K_f\varepsilon(k) + \varphi(q^{-1})M_2\varepsilon(k). \quad (29)$$

比较(13), (29)式, 由 $D(q^{-1})$ 的唯一性有

$$D(q^{-1}) = H\Lambda(q^{-1})M_1q^{-1} + H\Lambda(q^{-1})K_f + \varphi(q^{-1})M_2. \quad (30)$$

比较上式两边 q^{-i} 的系数阵有关系

$$D_i = H\Lambda_{i-1}M_1 + H\Lambda_iK_f + \varphi_iM_2, \quad \Lambda_{-1} \triangleq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n_d. \quad (31)$$

其中 $D_0 = I_m, \varphi_0 = 1$, 由(31)式容易得到(20)式. 其中由引理 1 知 Ω 为列满秩阵, 因而有^[2] $\Omega^\# = (\Omega^T\Omega)^{-1}\Omega^T$. 将(17), (24)式代入(23)式便得到(18), (21)式.

注意, 在定理 1 条件下, 对单输出系统 ($m=1$), 由引理 1 知 $\beta=n, \Omega$ 是非异方阵, 故 $\Omega^\# = \Omega^{-1}$.

推论 1. 在定理 1 条件下, 若 $w(k)$ 与 $v(k)$ 不相关 ($S=0$), 则稳态 Kalman 滤波器为

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K_f\varepsilon(k+1), \quad (32)$$

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi\hat{x}(k|k), \quad (33)$$

$$\varepsilon(k) = y(k) - H\hat{x}(k|k-1), \quad (34)$$

其中可任置初值 $\hat{x}(0|-1)$. 或等价地,

$$\hat{x}(k+1|k+1) = (I_n - K_fH)\Phi\hat{x}(k|k) + K_fy(k+1). \quad (35)$$

其中任置初值 $\hat{x}(0|0)$, 且 K_f 由下式计算:

$$K_f = \begin{bmatrix} H \\ H\Lambda_1 \\ \vdots \\ H\Lambda_{\beta-1} \end{bmatrix}^\# \begin{bmatrix} I_m - M_2 \\ D_1 - \varphi_1M_2 \\ \vdots \\ D_{\beta-1} - \varphi_{\beta-1}M_2 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

证明. 由 $S=0$ 引出 $\hat{w}(k|k)=0$ 和 $M_1=0$, 于是由(23)式得(33)式, 由(20)式得(36)式, 并将(33), (34)式代入(32)式得(35)式.

引理 2. 定义矩阵

$$\Pi_i = -\varphi_1\Pi_{i-1} - \varphi_2\Pi_{i-2} - \dots - \varphi_i\Pi_0 + D_i, \quad \Pi_0 = I_m, \quad i = 1, 2, \dots, \beta-1, \quad (37)$$

其中规定 $\varphi_i=0 (i>n_\varphi)$, 则有关系式

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 & \dots & 0 \\ \varphi_1I_m & I_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \varphi_{\beta-1}I_m, & \dots & \varphi_1I_m, & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m - M_2 \\ \Pi_1 - HM_1 \\ \vdots \\ \Pi_{\beta-1} - H\Phi^{\beta-2}M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m - M_2 \\ D_1 - HM_1 - \varphi_1M_2 \\ \vdots \\ D_{\beta-1} - H\Lambda_{\beta-2}M_1 - \varphi_{\beta-1}M_2 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

证明. 只需证明(38)式左边乘积矩阵的第 $(i+1)$ 行矩阵等于其右边矩阵的第 $(i+1)$ 行矩阵, 即

$$\begin{aligned} & \varphi_i(I_m - M_2) + \varphi_{i-1}(\Pi_1 - HM_1) + \cdots + \varphi_0(\Pi_i - H\Phi^{-1}M_1) \\ & = D_i - H\Lambda_{i-1}M_1 - \varphi_iM_2. \end{aligned} \quad (39)$$

其中 $i=1, 2, \dots, \beta-1; \varphi_0=1$. 事实上由(9)式迭代有

$$\Lambda_i = \sum_{j=0}^i \varphi_{i-j}\Phi^j, \quad i=0, 1, \dots, \beta-2, \quad \varphi_0=1, \quad \Phi^0=I_n. \quad (40)$$

利用(37)(40)式可直接验证(39)式成立.

定理 2. 在假设 1 和假设 2 下, 则系统(1), (2)的稳态 Kalman 滤波器为(17)–(19)式. 但稳态 Kalman 滤波器增益 K_f 的另一种新算法为

$$K_f = \begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ \vdots \\ H\Phi^{\beta-1} \end{bmatrix}^{\#} \begin{bmatrix} I_m - M_2^f \\ \Pi_1 - HM_1 \\ \vdots \\ \Pi_{\beta-1} - H\Phi^{\beta-2}M_1 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

其中 Π_i 由(37)式递推计算.

证明. 由(20), (16)式可得到

$$K_f = \begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ \vdots \\ H\Phi^{\beta-1} \end{bmatrix}^{\#} \begin{bmatrix} I_m & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_1 I_m & I_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \varphi_{\beta-1} I_m & \cdots & \varphi_1 I_m & I_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_m - M_2 \\ D_1 - HM_1 - \varphi_1 M_2 \\ \vdots \\ D_{\beta-1} - H\Lambda_{\beta-2}M_1 - \varphi_{\beta-1}M_2 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

利用引理 2 的(38)式立刻得到(41)式.

注意, 由于 K_f 的两种算法(20), (41)式都源于关系式(31), 因而它们是等价的, 即通过引理 1 和引理 2, 由(20)式可引出(41)式, 反之亦然.

推论 2. 在定理 2 条件下, 若 $w(k)$ 和 $v(k)$ 不相关($S=0$), 则稳态 Kalman 滤波器为(32)–(35)式, 其中

$$K_f = \begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ \vdots \\ H\Phi^{\beta-1} \end{bmatrix}^{\#} \begin{bmatrix} I_m - M_2 \\ \Pi_1 \\ \vdots \\ \Pi_{\beta-1} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

证明. 由 $S=0$ 有 $M_1=0$, 由(41)式引出(43)式.

3 自校正 Kalman 滤波器

当噪声统计未知时, 为了计算 K_f , 应用 ARMA 新息模型(13)的递推辨识器^[6], 可得在时刻 k D_i 的估值 $\hat{D}_i(k)$, 将其代入(13)式可递推计算估值 $\hat{\epsilon}(k)$, 而估值 $\hat{Q}_\epsilon(k)$ 可用采样方差递推计算为^[10]

$$\hat{Q}_\epsilon(k) = \hat{Q}_\epsilon(k-1) + (\hat{\epsilon}(k)\hat{\epsilon}^T(k) - \hat{Q}_\epsilon(k-1))/k. \quad (44)$$

计算(11)式两边 MA 过程的相关函数有矩阵方程组

$$\sum_{j=i}^{n_d} D_j Q_\epsilon D_{j-i}^T = \sum_{j=i}^{n_0} B_j Q_w B_{j-i}^T + \sum_{j=i}^{n_0} \varphi_j \varphi_{j-i} Q_v + \sum_{j=i}^{n_0} B_j S \varphi_{j-i} + \sum_{j=i}^{n_0} \varphi_j S^T B_{j-i}^T. \quad (45)$$

其中 $i=0, 1, \dots, n_d$, $n_0 = \max(n_b, n_\varphi)$, $B_j=0(j > n_b)$, $\varphi_j=0(j > n_\varphi)$.

置 Q_w, Q_v 和 S 中的未知参数组成的列向量为 θ , 按分量将(45)式写成 θ 的线性方程组 $A\theta=b$. 假设系数阵 A 为列满秩, 则有唯一解 $\theta=A^{\#}b=(A^T A)^{-1}A^T b$, 将估值 $\hat{D}_i(k), \hat{Q}_e(k)$ 代入其中可得估值 $\hat{\theta}(k)$, 将有关估计值代入(20), (21)或(41)式, 可得估值 $\hat{K}_f(k)$ 和 $\hat{K}_p(k)$. 再将有关估值代入(17)–(19)式便得到自校正 Kalman 滤波器. 假设参数估计是一致的, 即 $\hat{D}_i(k) \rightarrow D_i(k \rightarrow \infty), i=1, \dots, n_d$, 则 $\hat{\epsilon}(k), \hat{Q}_e(k), \hat{\theta}(k), \hat{K}_f(k), \hat{K}_p(k)$ 将分别渐近于 $\epsilon(k), Q_e, \theta, K_f, K_p$, 因而自校正 Kalman 滤波器将渐近于稳态 Kalman 滤波器(17)–(19)式. 注意, 若 $\varphi(q^{-1})$ 中含有 Φ 的未知参数, 则也可通过辨识(13)式得到其估值.

4 仿真例子

考虑不稳定系统(1), (2)为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(k), \quad (46)$$

$$y(k) = [1 \ 0] \mathbf{x}(k) + v(k), \quad (47)$$

$$v(k) = \alpha w(k) + n(k). \quad (48)$$

其中 $w(k)$ 和 $n(k)$ 是零均值、方差各为 σ_w^2 和 σ_n^2 的独立高斯白噪声, 则有 $s = Ew(k)v(k) = \alpha\sigma_w^2$. 可验证该系统是完全可观、完全可控的, 且 $n=2, m=1, \beta=2$. 容易得到 ARMA 新息模型为

$$(1 - aq^{-1})(1 - q^{-1})y(k) = (1 + d_1q^{-1} + d_2q^{-2})\epsilon(k), \quad (49)$$

其中 $\epsilon(k)$ 是零均值, 方差为 σ_ϵ^2 的白噪声, 且

$$(1 + d_1q^{-1} + d_2q^{-2})\epsilon(k) = w(k-2) + (1 - aq^{-1})(1 - a)v(k). \quad (50)$$

计算(50)式两边 MA 过程的相关函数在 $i=1, 2$ 处的值有

$$(d_1 + d_1d_2)\sigma_\epsilon^2 = -(1 + a)^2\sigma_v^2 - (1 + a)s, \quad (51)$$

$$d_2\sigma_\epsilon^2 = a\sigma_v^2 + s. \quad (52)$$

由此可解出 $\sigma_v^2/\sigma_\epsilon^2 = -(d_1 + d_2 + ad_2 + d_1d_2)/(1 + a)$. 由(49)式有 $\varphi_1 = -(1 + a)$. 由(46)、(47)式有 $H\Gamma = 0$, 从而 $HM_1 = 0$. 由(9), (20)式可算出 K_f 为

$$K_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 - \sigma_v^2/\sigma_\epsilon^2 \\ d_1 - \varphi_1\sigma_v^2/\sigma_\epsilon^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+a} \begin{bmatrix} 1+a+d_1+d_2+ad_2+d_1d_2 \\ 1+a+d_1-ad_2-a^2d_2-ad_1d_2 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

在仿真中取 $a=0.7, \sigma_w^2=1, \sigma_n^2=1, \alpha=0.5$, 且设 $\sigma_w^2, \sigma_n^2, a$ 是未知的. 利用递推增广最小二乘法(RELS)^[6]辨识 ARMA 新息模型(49)式. 可得估值 $\hat{a}(k), \hat{d}_1(k)$ 和 $\hat{d}_2(k)$, 其收敛性如图 1 所示, 其中经计算真实值 $d_1=0.253, d_2=-0.63$, 可看到它们收敛于相应的真实值. 图 2 表示状态 $\mathbf{x}(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$ 的分量 $x_1(k)$ 和自校正 Kalman 滤波器 $\hat{x}_1(k|k)$. 图 3 表示 $x_2(k)$ 和自校正 Kalman 滤波器 $\hat{x}_2(k|k)$. 可看到它们具有较高的精度. 此外, 不难直接验证用(20)式计算 K_f 与用(41)式计算 K_f 引出相同的结果. 还应注意本例 Φ 是不稳定的.

5 结语

本文算法的基本假设是系统的完全可观、完全可控性. 它不仅保证了稳态 Kalman 滤

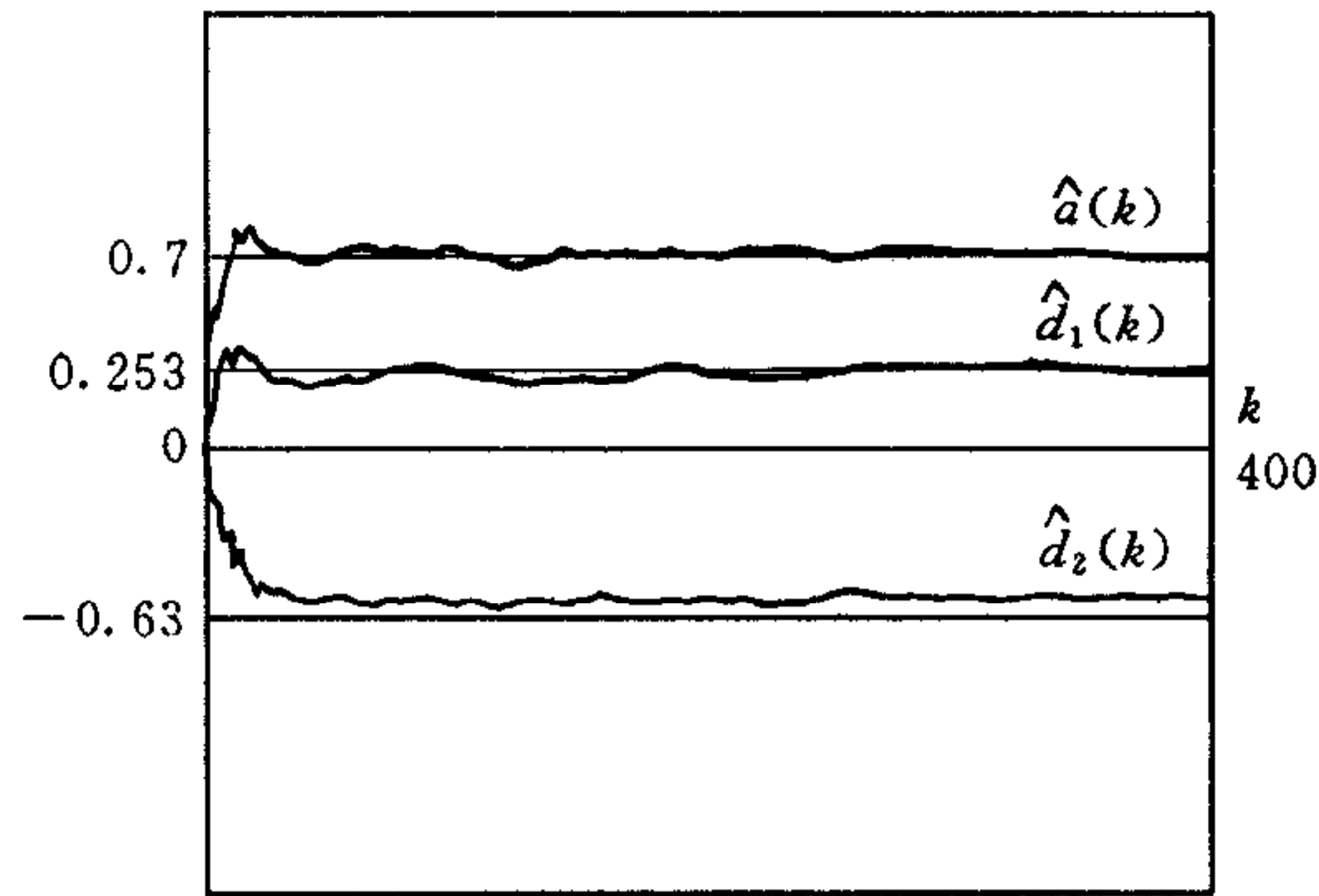
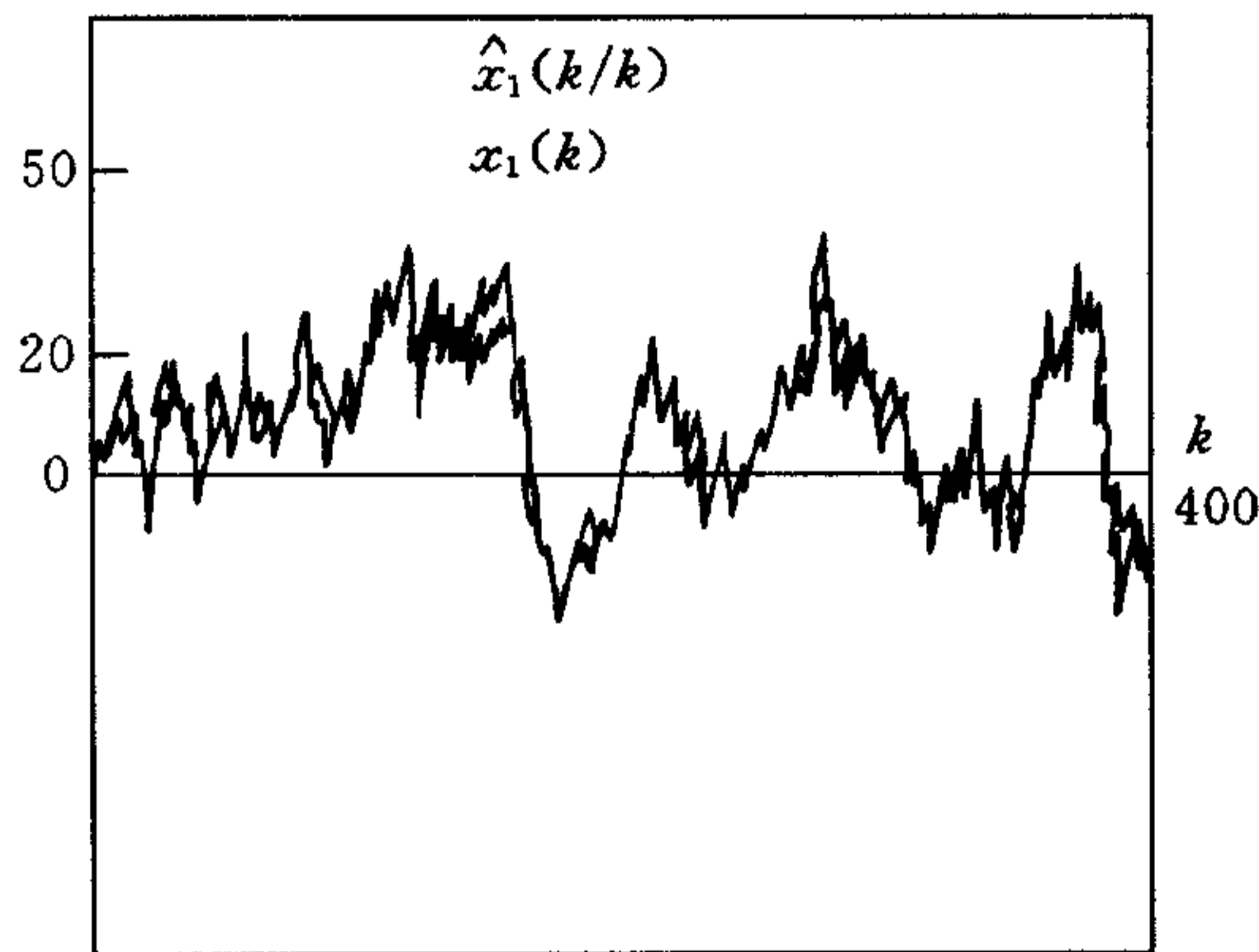
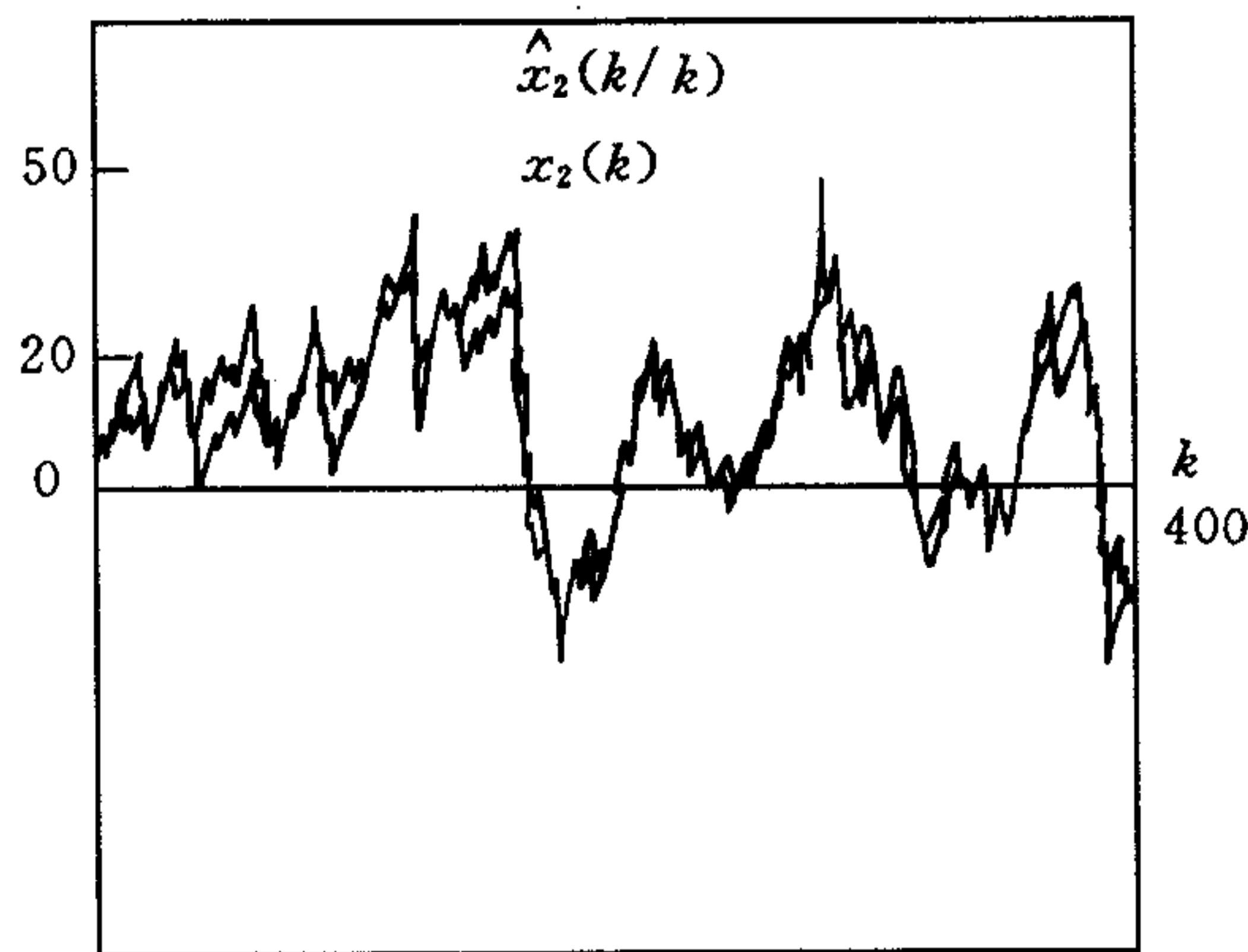


图 1 RELS 参数估值的收敛性

图 2 $x_1(k)$ 和自校正 Kalman 滤波器 $\hat{x}_1(k|k)$ 图 3 $x_2(k)$ 和自校正 Kalman 滤波器 $\hat{x}_2(k|k)$

波器的存在,而且还保证了稳态 Kalman 滤波器增益 K_i 的可解性.由于带不稳定和/或奇异状态转移阵 Φ 的系统可以是完全可观、完全可控的,因此所提出的求 K_i 的新算法也可处理这类系统.仿真例子(Φ 不稳定)也说明了这个事实,克服了文献[2]要求 Φ 稳定、文献[4]要求 Φ 非异的缺点.

参 考 文 献

- [1] Anderson B D O, Moore J B. Optimal filtering, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1979.

- [2] Mehra R K. Approaches to adaptive filtering, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1972, **AC-17**(5): 693—702.
- [3] Tajima K. Estimation of steady-state Kalman filter gain. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1978, **AC-23**(5): 944—946.
- [4] 邓自立, 宋国英. 稳态 Kalman 滤波增益估计的两种新算法及其应用. *信息与控制*, 1991, **20**(6): 20—26.
- [5] 邓自立, 郭一新. 现代时间序列分析及其应用——建模、滤波、去卷、预报和控制. 北京: 知识出版社, 1989, 1—303.
- [6] Ljung L. System identification; theory for user, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987.
- [7] 关肇直, 陈翰馥. 线性控制系统的能控性和能观测性. 北京: 科学出版社, 1975, 65—102.
- [8] Jezek J, Kucera V. Efficient algorithm for matrix spectral factorization, *Automatica*, 1985, **21**: 663—669.
- [9] Gevers M, Wouters WRE. An innovation approach to the discrete-time stochastic realization problem, *Journal A*, 1978, **19**: 90—109.
- [10] 邓自立, 张焕水. 自校正 Kalman 滤波、预报、去卷、平滑新方法. *控制理论与应用*, 1994, **11**(2): 137—145.

NEW ALGORITHMS OF STEAD-STATE KALMAN FILTER GAIN

DENG ZILI LI JIANGUO

(*Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University, Harbin 150080*)

Abstract By using the modern time series analysis method and based on the ARMA innovation model, two new algorithms of steady-state Kalman filter gain are presented, and their equivalence is proved. The self-tuning Kalman filters can be implemented by using a recursive identifier of parameters for the ARMA innovation model, in conjunction with the new algorithms. A simulation example shows usefulness of the proposed algorithms.

Key words Steady-state Kalman filter gain, self-tuning Kalman filter, modern time series analysis method.

邓自立 1938年生. 1962年毕业于黑龙江大学数学系, 现为黑龙江大学应用数学研究所教授. 发表论文 120 余篇, 出版专著两部. 感兴趣的领域为自校正滤波理论及其应用, 信号处理, 状态估计, 系统辨识, 现代时间序列分析等.

李建国 1969年生. 1992年毕业于黑龙江大学计算机科学系, 1995年于黑龙江大学应用数学研究所获自动控制理论及应用专业硕士学位. 感兴趣的领域为自校正 Kalman 滤波, 状态估计, 自适应信号处理, 系统仿真.