

# 一类 DEDS 最优调度问题的解法<sup>1)</sup>

陈文德

(中国科学院系统科学研究所 北京 100080)

(中国科学院自动化所复杂系统工程学开放实验室 北京 100080)

**摘 要** 本文提出了带存储器生产线的一类新的最优调度问题,给出了最优调度目标函数的具体形式,指出它不是凸函数;在一个变量时给出了最优调度的公式解,在多个变量时得到了一个迭代寻优的算法。

**关键词** 离散事件动态系统(DEDs),极大代数,最优调度,存储器

## 1 引言

一般的调度与排序问题已有许多研究<sup>[1,2]</sup>.文献[3]解决了太原钢铁公司三台热轧机生产线提出的一类新的无阻塞最优调度问题(也称为轧制节奏控制问题).文献[4]等提出并解决了  $n$  种工件与  $m$  台机器的这类问题.但热轧线以外的许多种生产线是允许阻塞的.本文提出更困难的允许有阻塞的这类新的最优调度问题.

问题.有多台机器组成带有限存贮器的串行生产线,进行批量生产,每批加工  $n$  种工件.设加工时间均已知, $n$  种工件的加工次序已排定,当第一台机器空出时就投入下一个工件.问如何调度每种工件的数目  $M_i$ ,使每批共生产  $N \triangleq \sum_{i=1}^n M_i$  个工件,而单位时间的利润指标

$$f = \sum_{i=1}^n W_i M_i / \lambda \quad (1)$$

达到最大?这里  $\lambda$  是生产一批工件所需时间, $W_i$  为第  $i$  种工件加工后所增利润.

本文基本上解决了这个问题.

## 2 批生产周期 $\lambda$ 的公式与函数形式

令  $D = \{R \cup \{-\infty\}, \oplus, \cdot\}$  为极大代数,其中  $R$  为实数域,  $a \oplus b = \max(a, b)$ ,  $a \cdot b = a + b$ ,  $\sum \oplus$ ,  $\prod$  分别表示极大代数意义下的和,积.设串行生产线中第  $r$  个机器前有串行的  $b_r$  个存贮器组成缓冲区  $B_r$ .每个存贮器看作加工时间为  $O$  的伪机器,机器与存贮器数目 ( $b_r \geq 0$ ) 的总和为  $m$ .  $x_r(k)$  表示第  $k$  批最后一个工件  $J_N$  离开机器  $m_r$  的时间,  $1 \leq r \leq m$ .  $P_r(j)$  表示第  $j$  个工件  $J_j$  在  $m_r$  上加工所需的时间.引用文献[5]的结果:

1) 本文得到国家自然科学基金资助.

引理 1<sup>[5]</sup>. 在上述假设下, 令  $m_1$  空出时就投入下一个工件, 则上述串行线批量生产的状态方程可用  $D$  中运算列出

$$[x_1(k+1), \dots, x_m(k+1)]^r = \mathring{A}_N [x_1(k), \dots, x_m(k)]^r, \tag{2}$$

其中

$$\mathring{A}_N = \prod_{j=1}^N A(j), \tag{3}$$

$$A(j) = \begin{bmatrix} P_1(j) & 0 & & & \\ P_{12}(j) & P_2(j) & 0 & -\infty & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ P_{1,m-1}(j) & P_{2,m-1}(j) & \dots & P_{m-1}(j) & 0 \\ P_{1,m}(j) & P_{2,m}(j) & \dots & \dots & P_m(j) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$P_{rs} = \prod_{l=r}^s P_l(j).$$

且存在  $k_0 > 0$ , 当  $k \geq k_0$  时有

$$x_m(k+1) = \lambda x_m(k), \tag{5}$$

其中

$$\lambda = \sum_{r=1}^m \oplus a_r. \tag{6}$$

这里  $a_1, \dots, a_m$  为  $\mathring{A}_N$  的对角线上元素.

对第一节提出的问题, 当  $\sum_{l=1}^{i-1} M_l < j \leq \sum_{l=1}^i M_l$  时, 各  $P_r(j)$  相同, 记为  $t_r(i)$ , 它表示第  $i$  种工件在  $m_r$  上加工所需时间; 各  $A(j)$  也相同, 记为

$$A_i = \begin{bmatrix} t_1(i) & 0 & & -\infty & \\ t_{12}(i) & t_2(i) & 0 & & \\ \dots & \dots & \dots & & 0 \\ t_{1m}(i) & t_{2m}(i) & \dots & \dots & t_m(i) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$t_{rs(i)} = \prod_{l=r}^s t_l(i).$$

定义阵  $\begin{bmatrix} M_i \\ A_i \end{bmatrix}^r$  的第  $r$  行第  $s$  列元素为  $a_{rs}(M_i)$ .  $rs$  取定后, 定义  $A_i^s$  对角线元素的一串极大值

$$\hat{t}_1(i) = \tilde{t}_1(i) = \sum_{l=r}^s \oplus t_l(i), \tag{8}$$

$$r \leq s \text{ 时, 令 } j_1 = j'_1 = 0, \quad r > s \text{ 时, 令 } j_1 = j'_1 = r - s - 1. \tag{9}$$

若  $j_{u-1} < j < j_u$  时,  $t_{r-j}(i) \leq \hat{t}_{u-1}(i)$ , 而  $t_{r-j_u}(i) > \hat{t}_{u-1}(i)$  则令

$$\hat{t}_u(i) \triangleq t_{r-j_u}(i), \tag{10}$$

直到  $t_{r-j}(i) = t_1(i)$  共定义出  $\hat{t}_1(i), \dots, \hat{t}_R(i)$ . 若  $j'_{v-1} < j < j'_v$  时,  $t_{s+j}(i) \leq \tilde{t}_{v-1}(i)$ , 而  $t_{s+j'_v}(i) > \tilde{t}_{v-1}(i)$ , 则令

$$\hat{t}_v(i) \triangleq t_{s+j'_v}(i), \tag{11}$$

直到  $t_{s+j}(i) = t_m(i)$ , 共定义出  $\tilde{t}_1(i), \dots, \tilde{t}_Q(i)$ . 上述极大值串与  $rs$  有关.

**定理 1.** 在上述记号与定义下, 有

$$a_{rs}(M_i) = \begin{cases} -\infty, & \text{若 } r > s, M_i < r - s, \\ 0, & \text{若 } r > s, M_i = r - s, \\ \sum_{u=1}^z \oplus t_{r-j_u, s}(i) \hat{t}_u(i)^{M_i-1-j_u} \oplus \sum_{v=1}^y \oplus t_{r, s+j_v}(i) \tilde{t}_v(i)^{M_i-1-j_v}, & \\ \text{其中 } j_z < M_i \leq j_{z+1}, j_y < M_i \leq j_{y+1}, & \\ \text{若 } r > s, M_i > r - s, \text{ 或 } r \leq s, & \end{cases} \quad (12)$$

$$\mathring{A}_N = \prod_{i=1}^n A_i^{M_i}, \quad (13)$$

$$\text{批生产周期 } \lambda = \sum_{j=1}^p \oplus \prod_{i=1}^n \alpha_{ij}^{M_i} \beta_j, \quad (14)$$

其中  $\alpha_{ij}, \beta_j$  可由 (6—13) 式算出.

证明.  $t_{rs}(i)$  等全部简记为  $t_{rs}$  以便使证明简洁. (7) 式表示图  $G(A_i^r)$  中有  $m$  个点,  $r \leq s$  时  $r$  到  $s$  弧重为  $t_{rs}$ ;  $r = s + 1$  时  $r$  到  $s$  的弧重为 0,  $r > s + 1$  时  $r$  到  $s$  没有弧.  $a_{rs}(M_i)$  表示图  $G(A_i^r)$  中  $r$  到  $s$  的长为  $M_i$  的最重路的路重. 从图论知识易知: 当  $M_i$  足够大时, 上述最重路在它过的均重最重的回路上绕圈. 当  $r \leq s$  时, 若  $2 \leq M_i \leq j_2$ , 则从  $r$  经过  $< s$  的点到  $s$  的路中, 由  $\hat{t}_1, \hat{t}_2$  的定义, 易知在重为  $\hat{t}_1$  的自回路上绕圈的路最重 (绕 0 圈即仅过  $\hat{t}_1$ ), 因为其它回路均重或其它弧重都  $\leq \hat{t}_1$ . 这最重路重为  $t_{rs} \hat{t}_1^{M_i-1-j_1}$ . 当  $j_u < M_i \leq j_{u+1}$  时, 类似可知: 长为  $M_i$  的最重路可能在重为  $\hat{t}_u$  的自回路上绕圈, 而  $r \rightarrow r-1 \rightarrow \dots \rightarrow r-j_u$  的弧重都为 0, 在  $\hat{t}_u$  上绕圈的数目为  $M_i-1-j_u$ , 重为  $\hat{t}_u^{M_i-1-j_u}$ ,  $r-j_u$  到  $s$  的弧重为  $t_{r-j_u, s}$ , 总重为  $t_{r-j_u, s} \hat{t}_u^{M_i-1-j_u}$ . 由于  $M_i$  不是充分大, 虽  $r \rightarrow r-j_u \rightarrow r-j_u-1 \rightarrow \dots \rightarrow s$  形式的路因类似理由, 重  $\leq$  上述总重, 但  $r \rightarrow r-j_u+1 \rightarrow \dots \rightarrow s$  之类不经过  $\hat{t}_u$  的路仍可以  $t_{r-j_w, s} \hat{t}_w^{M_i-1-j_w}$  为最重,  $1 \leq w \leq u-1$ . 因此, 从  $r$  经过  $< s$  的点到  $s$  的路中, 最重为

$$\sum_{u=1}^z \oplus t_{r-j_u, s} \hat{t}_u^{M_i-1-j_u}, \quad j_z < M_i \leq j_{z+1}, \quad (15)$$

类似地从  $r$  经过  $> r$  再经过  $> s$  的点到  $s$  的路中, 最重为

$$\sum_{v=1}^y \oplus t_{r, s+j_v} \tilde{t}_v^{M_i-1-j_v}, \quad j'_y < M_i \leq j'_{y+1}.$$

对于  $r$  经  $< r$  再经  $> s$  再到  $s$  的路, 其最重者必是在某  $\hat{t}_u$  或  $\tilde{t}_v$  上绕圈的路,  $r-j_u$  为路中点的最小数且有  $\hat{t}_u \geq \tilde{t}_v$ , 这里  $s+j_v$  为最大数, 于是把  $r-j_u \rightarrow s+j_v \rightarrow s+j_v-1 \rightarrow \dots \rightarrow s$  的路换成  $r-j_u \rightarrow s$  的弧, 及在  $\hat{t}_u$  上多绕圈, 则由  $\hat{t}_u \geq \tilde{t}_v$  及  $\tilde{t}_v$  的定义, 可知新路更重, 且为 (15) 式中的一项. 于是,  $r$  到  $s$  长为  $M_i$  的路最重为

$$\sum_{u=1}^z \oplus t_{r-j_u, s} \hat{t}_u^{M_i-1-j_u} \oplus \sum_{v=1}^y \oplus t_{r, s+j_v} \tilde{t}_v^{M_i-1-j_v} \quad (16)$$

其中  $j_z < M_i \leq j_{z+1}, j_y < M_i \leq j_{y+1}$ .

当  $r > s, M_i < r - s$  时,  $r \rightarrow s$  无长为  $M_i$  的路,  $a_{rs}(M_i) = -\infty$ ; 当  $M_i = r - s$  时, 仅有一条每段弧长为 0 的路,  $a_{rs}(M_i) = 0$ . 当  $M_i > r - s$  时, 类似地可得  $r$  到  $s$  长为  $M_i$  的路最重为

(16) 式. 至此 (12) 式证毕. (13) 式显然. 由于  $a_{rs}(M_i)$  是  $\sum_{j=1}^{p_i} \oplus a_j^{M_i} b_j$  形函数, 由 (13) 式  $\mathring{A}_N$

各元素是  $\sum_{j=1}^{p_0} \oplus \prod_{i=1}^n \tilde{a}_{ij}^{M_i} \tilde{b}_j$  形函数. 由(6)式,  $\lambda$  恰如(14)式所示. 定理 1 证毕.

**推论 1.** 当各  $M_i$  足够大时,

$$\lambda = \prod_{i=1}^m \left( \sum_{l=1}^m \oplus t_l(i) \right)^{M_i} \beta.$$

证明. 由于  $M_i$  足够大, 故  $a_{rs}(M_i) = \left( \sum_{l=1}^m \oplus t_l(i) \right)^{M_i} b_j$ , 用(13), (6)式计算后易知推论成立.

设  $B_{1i} \leq M_i \leq B_{2i}, 1 \leq i \leq n$ . 由推论 1, (1)式有

**推论 2.** 当各  $M_i$  足够大时, 目标函数  $f$  是普通运算下的线性分式函数, 最优值在边界顶点上达到.

定理 1 中批量瓶颈机利用率  $\leq 1$ , 但在  $b_r$  适当大时, 能使瓶颈机利用率等于 1, 且同时又使  $f$  最优. 为此引用文献[2]的一个结果

**引理 2**<sup>[2]</sup>. 对有  $M$  台机器的串行线, 当每台机器前存贮器的数目  $b_r \geq N-1$  时, 批生产

$$\text{周期 } \lambda = \sum_{i=1}^M \oplus \prod_{k=1}^N P_i(k).$$

由引理 2 立即可得

$$\text{定理 2. 当 } b_r \geq N-1 \text{ 时, } \lambda = \sum_{j=1}^M \oplus \prod_{i=1}^n t_j(i)^{M_i}.$$

定理 1, 2 指出,  $\lambda$  都有如下函数形式:

$$\lambda = \max_{1 \leq j \leq p} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} M_i + \beta_j \right\}, \quad (17)$$

上式中各运算为普通运算. 由于  $t_{rs} \geq 0$ , 知  $\alpha_{ij} \geq 0$ . (17)式中  $\max_{1 \leq j \leq p}$  下非常多的线性函数项可能在  $\max$  运算后对形成最后形式的  $\lambda$  不起作用, 可删去; 因此不妨设  $p$  是删去全部可删项后的最小值.

### 3 最优调度问题的解法

当  $n=2, M_1$  取定为 1, 记  $M_2=M$  时, (17)式为单变量函数, 合并常数项后可记为

$$\lambda(M) = \max_{1 \leq j \leq p} \{ \alpha_j M + \beta_j \}. \quad (18)$$

显然, 其中  $M \geq 1, \alpha_j > 0$ . 为了研究函数的凸性, 考察目标函数的倒数

$$g(M) = 1/f(M) = \max_{1 \leq j \leq p} \{ \alpha_j M + \beta_j \} / (W_2 M + W_1), \quad (19)$$

最优调度归结为求  $g(M)$  的最小值.

**定理 3.** (19)式所示的  $g(M)$  在

$$M = (\beta_{j_0} - \beta_{j_0+1}) / (\alpha_{j_0+1} - \alpha_{j_0}), \quad (20)$$

处取到最小值, 这里  $\alpha_j$  已被重新标定下标, 满足

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p. \quad (21)$$

$\alpha_0 = (\alpha_1 + \beta_1)W_2/W_1 / (1 + W_2/W_1), \quad \beta_0 = (\alpha_1 + \beta_1) / (1 + W_2/W_1), \quad \alpha_{p+1} = \alpha_p + 1,$   
 $\beta_{p+1} = -\infty. j_0$  满足

$$\beta_{j_0+1}/\alpha_{j_0+1} < W_1/W_2 \leq \beta_{j_0}/\alpha_{j_0}. \quad (22)$$

证明. 从几何观点看,  $g(M)$  的分子为  $p$  条线段形成的折线, 斜率  $\alpha_j$  逐段增大; 由  $\alpha_{j+1} > \alpha_j$  及取  $\max_{1 \leq j \leq p}$ , 易知  $\beta_{j+1} < \beta_j, 1 \leq j < p$ , 于是有

$$\beta_{j+1}/\alpha_{j+1} < \beta_j/\alpha_j, \quad 1 \leq j < p \quad (23)$$

由定理 3 假设, 易知

$$\beta_0/\alpha_0 = W_1/W_2, \quad \beta_{p+1}/\alpha_{p+1} = -\infty. \quad (24)$$

于是, 由(23), (24)式, 总有  $j_0$  存在, 满足(22)式. 显然, (19)式中每条线段与分母形成函数为双曲线形式

$$(\alpha_j M + \beta_j)/(W_2 M + W_1) = (\alpha_j/W_2) \{1 + (\beta_j/\alpha_j - W_1/W_2)/(M + W_1/W_2)\}, \quad (25)$$

作变量代换  $x = M + W_1/W_2$  后, 由(22)式, 易知双曲线  $(\beta_j/\alpha_j - W_1/W_2)/x$  在  $j \leq j_0$  时为单调减函数, 在  $j > j_0$  时为单调增函数(注意到  $x$  总大于 0, 双曲线仅取其中一支), 而(25)式仅把上述曲线加 1 后乘  $\alpha_j/W_2$  而已, 不改变其单调增、减性质. 因此  $g(M)$  的最小值, 在  $j = j_0$  与  $j_0 + 1$  这两条双曲线的交点上达到, 即  $M$  为以下方程的解:

$$\alpha_{j_0} M + \beta_{j_0} = \alpha_{j_0+1} M + \beta_{j_0+1}, \quad (26)$$

显然(26)式的解就是(20)式. 定理 3 证毕.

附记 1. 当(20)式取非整数值时, 取最接近它的两个整数, 比较相应  $g(M)$  的大小, 取小的那个对应的  $M$  作为解, 称这为解的整量化. 当(22)式中  $W_1/W_2 = \beta_{j_0}/\alpha_{j_0}$  时, (25)式双曲线变成了常数  $\alpha_{j_0}/W_2$ , 于是, 可从以下两方程:

$$\alpha_{j_0} M + \beta_{j_0} = \alpha_j M + \beta_j, \quad j = j_0 - 1, j_0 + 1, \quad (27)$$

求出两个解, 最优解  $M$  取在这两个解之间的任意整值上

$$M \in [(\beta_{j_0-1} - \beta_{j_0})/(\alpha_{j_0} - \alpha_{j_0-1}), (\beta_{j_0} - \beta_{j_0+1})/(\alpha_{j_0+1} - \alpha_{j_0})], \quad (28)$$

$g(M)$  取唯一最小值  $\alpha_{j_0}/W_2$ . 当  $W_1/W_2 > \beta_1/\alpha_1$  时,  $j_0 = 0$ , 由(20)式  $M = 1$ ; 当  $W_1/W_2 \leq \beta_p/\alpha_p$  时,  $j_0 = p$ , 由(20)式  $M = +\infty$ ; 即最优  $M$  均在边界上取到, 而相应  $g(1) = (\alpha_1 + \beta_1)/(W_2 + W_1)$ ,  $g(+\infty) = \alpha_p/W_2$ .

附记 2. 由于  $g(M)$  由多段双曲线接成, 显然,  $g(M)$  不是凸函数; 因而, 讨论多个  $M_i$  时, 不能简单地引用凸函数理论而推得极小值即最小值.

研究多个  $M_i$  的情况, 类似于(19)式, 考察目标函数的倒数

$$g(M_1, \dots, M_n) = \max_{1 \leq j \leq p} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} M_i + \beta_j \right\} / \sum_{i=1}^n W_i M_i, \quad (29)$$

固定  $n-1$  个  $M_i$ , 变化剩下的一个  $M_i$ , 对它应用定理 3, 如此反复迭代, 求得(29)式的极小值. 详细有以下算法.

### 算法.

1 初始步. 取定  $M_2, \dots, M_n$  的值, 仅把  $M_1$  看作变量, 重新标定下标后, 整序为

$$\alpha_{11} < \alpha_{12} < \dots < \alpha_{1p}.$$

注意: 原来的  $p$  在  $n$  个变量  $M_i$  意义下取到最小值; 现在对一个变量  $M_1$ , 经过删去  $\max$  下不起作用的线性函数项和合并后, 这里的  $p$  可能取到比原来的  $p$  更小的最小值. 应用定理 3 令

$$\alpha_{10} = \left( \alpha_{11} + \sum_{i=2}^n \alpha_{i1} M_i + \beta_1 \right) \left( \sum_{i=2}^n W_i M_i \right) / W_1 \left( 1 + \sum_{i=2}^n W_i M_i / W_1 \right),$$

$$\beta_0 = \left( \alpha_{11} + \sum_{i=2}^n \alpha_{i1} M_i + \beta_1 \right) / \left( 1 + \sum_{i=2}^n W_i M_i / W_1 \right),$$

$$\alpha_{1,p+1} = \alpha_{1p} + 1, \quad \beta_{p+1} = -\infty.$$

取  $j_0$  满足

$$\left( \sum_{i=2}^n \alpha_{i,j_0+1} M_i + \beta_{j_0+1} \right) / \alpha_{1,j_0+1} < \sum_{i=2}^n W_i M_i / W_1 \leq \left( \sum_{i=2}^n \alpha_{ij_0} M_i + \beta_{j_0} \right) / \alpha_{1,j_0},$$

再取

$$M_1 = \left( \sum_{i=2}^n (\alpha_{i,j_0} - \alpha_{i,j_0+1}) M_i + \beta_{j_0} - \beta_{j_0+1} \right) / (\alpha_{1,j_0+1} - \alpha_{1,j_0}).$$

2 迭代步. 一般地可设:  $i < i_0$  时,  $M_i$  的值由前面的初始步与迭代步给出  $i > i_0$  时,  $M_i$  的值仍取初始值; 当迭代  $n-1$  次后, 所有  $M_i, i \neq i_0$ , 的值均由前面的迭代步给出. 然后, 仅把  $M_{i_0}$  看作变量, 经整序得

$$\alpha_{i_0,1} < \alpha_{i_0,2} < \dots < \alpha_{i_0,p}.$$

应用定理 3, 令

$$\alpha_{i_0,0} = \left( \alpha_{i_0,1} + \sum_{i \neq i_0} \alpha_{i1} M_i + \beta_1 \right) \left( \sum_{i \neq i_0} W_i M_i \right) / W_{i_0} \left( 1 + \sum_{i \neq i_0} W_i M_i / W_{i_0} \right),$$

$$\beta_0 = \left( \alpha_{i_0,1} + \sum_{i \neq i_0} \alpha_{i1} M_i + \beta_1 \right) / \left( 1 + \sum_{i \neq i_0} W_i M_i / W_{i_0} \right),$$

$$\alpha_{i_0,p+1} = \alpha_{i_0,p} + 1, \quad \beta_{p+1} = -\infty.$$

必存在一个  $j_0$ , 满足

$$\left( \sum_{i \neq i_0} \alpha_{i,j_0+1} M_i + \beta_{j_0+1} \right) / \alpha_{i_0,j_0+1} < \sum_{i \neq i_0} W_i M_i / W_{i_0} \leq \left( \sum_{i=i_0} \alpha_{ij_0} M_i + \beta_{j_0} \right) / \alpha_{i_0,j_0},$$

取

$$M_{i_0} = \left( \sum_{i \neq i_0} (\alpha_{ij_0} - \alpha_{i,j_0+1}) M_i + \beta_{j_0} - \beta_{j_0+1} \right) / (\alpha_{i_0,j_0+1} - \alpha_{i_0,j_0}).$$

以上步骤可以无限次进行下去, 每次都得到一个  $g(M_1, \dots, M_n)$  的值, 这些值  $> 0$ , 且由定理 3 为单调递减序列, 必收敛于一极限, 这极限就是调度问题的解.

附记 3. 当迭代达到工程要求精度时可停止, 并进行解的整量化. 当  $M_{i_0}$  取 (28) 式形式的区间解时, 可把区间两端的值分别取为  $M_{i_0}$ , 作两次迭代, 取值小的那个. 当出现  $M_{i_0} = +\infty$  时, 停止迭代,  $g = \alpha_{i_0,j_0} / W_{i_0}$ .

算法得到的是  $g(M_1, \dots, M_n)$  的极小值, 关于最小值, 有以下猜想

猜想: 上述算法得到的  $g(M_1, \dots, M_n)$  的极小值就是最小值.

### 参 考 文 献

- [1] Graves S C. A review of production scheduling. *Operations Research*. 1981, 29(4): 646—659.
- [2] 刘克. DEDS 的代数理论及其在柔性制造系统中的应用 [博士论文]. 北京: 中国科学院自动化研究所, 1991.
- [3] 陈文德, 张迪生. 极大代数方法在轧钢厂 DEDS 中的应用. *自动化学报*, 1995, 21: 99—103.
- [4] Chen Wende, Xu Jing. Non-blocking optimal control for flow shops with buffers, In: *Proceedings of International Conference on Systems Science*, Sept. 1995, Wroclaw, Poland.

- [5] 涂奉生, 乞敬换. 具有存储器的生产线的状态方程描述及其性能分析. 系统科学与数学, 1991, 11(2): 177—186.

## SOLUTION TO A KIND OF OPTIMAL SCHEDULING PROBLEM OF DISCRETE EVENT DYNAMIC SYSTEMS

CHEN WENDE

(*Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing 100080*)

(*Complex Systems Engineering Lab., Institute of Automation, Academia Sinica, Beijing 100080*)

**Abstract** In this paper we present a kind of new optimal scheduling problem for production lines with buffers. A concrete form of optimal scheduling objective function is given. We point out that it is not a convex function. Optimal formulation solution is given for one variable and an iterative algorithm is obtained for multivariables.

**Key words** DEEDS, max-algebra, optimal scheduling, buffer.

**陈文德** 1968年毕业于中国科学院研究生院. 现为中国科学院系统科学研究所研究员, 博士生导师. 长期以来从事于离散事件系统, 代数系统理论与编码的研究. 近年来多次出访欧洲著名大学, 进行离散结构领域的合作研究. 已发表专著 3 本, 论文 70 余篇, 曾获何潘清漪奖.