第 23 卷 第 6 期
1997 年 11 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 23, No. 6
Nov., 1997

研究简报

# $(J,J')$-无损因子分解中的若干问题研究[1)]

裘聿皇 张本勇
(中国科学院自动化研究所 北京 100080)

**关键词** 链式散射描述，$(J,J')$-无损因子分解，$H^\infty$控制问题.

## 1 引言

在文[1]中利用链式散射描述(CSD)求解 $H^\infty$控制问题，曾指出$(J,J')$-无损因子分解在 $H^\infty$控制问题中起了关键作用，文[2—4]也有类似看法. 基于 CSD 和$(J,J')$-无损因子分解，可以给出 $H^\infty$控制问题的一个简明的统一框架，避开了控制器镇定参数化和模型匹配问题[5].

$(J,J')$-无损因子分解是相当一般的分解，它的特例包括稳定阵的内外因子分解、镇定阵的 Wiener-Hopf 分解等. 因此，它在系统理论中也有重要意义.

$(J,J')$-无损因子分解存在的必要条件之一是存在非异方阵 $D_\pi \in R^{(p+q)\times(p+q)}$满足

$$D_\pi^T J_{p,q} D_\pi = D^T J_{m,r} D \tag{1}$$

如果存在，可使用 $D_\pi$ 来参数化$(J,J')$-无损因子分解的因子，其中 $J_{m,r}=\mathrm{diag}\{I_m,-I_r\}$，$J_{p,q}=\mathrm{diag}\{I_p,-I_q\}$，$m\geqslant p\geqslant 0$，$r\geqslant q\geqslant 0$，$D\in R^{(m+r)\times(p+q)}$.

文[3,7]等讨论了状态空间上基于 Riccati 方程计算$(J,J')$-无损因子分解. Tsai[7]和 Kimura[4]都仅对 $D$ 的一种特殊情况给出 $D_\pi$ 的一个解，这不适合实际的控制器设计计算. 本文对一般情形指出方程(1)有解的条件及其数值算法. 该算法已经在 Matlab 环境中实现，并用于我们开发的基于链式散射描述(CSD)求解 $H^\infty$控制问题的程序中.

正如 Kwarkernaak 所指出[9]，目前已有的解决 $H^\infty$控制问题的方法的假设条件均不完全一致，研究这些方法的相互联系将会促进对 $H^\infty$控制的理解. 本文研究了基于链式散射描述(CSD)求解 $H^\infty$控制问题的方法与经典的 DGKF 方法假设条件的联系，发现 CSD 方法中 $D_\pi$ 存在的假设与 DGKF 方法的假设条件 $A_2$ 是一致的.

## 2 矩阵方程：$X^T J_{p,q} X = S$ 有解的充要条件及算法

由惯性定理易知，矩阵方程

1)国家自然科学基金资助课题.
收稿日期 1995-11-17

$$X^T J_{p,q} X = S \tag{2}$$

有解的充要条件是：$S$ 恰有 $p$ 个正的特征值和 $q$ 个负的特征值. 其中 $X \in R^{(p+q)\times(p+q)}$ 为非异方阵，$J_{p,q}=\mathrm{diag}\{I_p, -I_q\}$，$S$ 为实对称阵. 由此得求解方程(2)的算法如下：

(1)将 $S$ 进行正交分解，$S=U\Lambda U^T$，其中 $\Lambda$ 为对角阵，其对角元素可能正负交叉排列，$U$ 为正交矩阵.

(2)判断方程是否有解，如果 $\Lambda$ 恰有 $p$ 个正的特征值和 $q$ 个负的特征值，继续；否则方程无解，退出.

(3)将 $S$ 化为 $S=U_1\Lambda_1U_1^T$，其中 $\Lambda_1=\mathrm{diag}\{\Lambda_p, -\Lambda_q\}$，$\Lambda_p=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_p\}$，$\Lambda_q=\mathrm{diag}\{\Lambda_{p+1},\cdots,\Lambda_{p+q}\}$，$\lambda_i>0$. 实际计算时，为使 $\Lambda$ 的前 $p$ 个特征值为正，后 $q$ 个特征值为负，只需交换 $\Lambda$ 的主对角线元素和 $U$ 的相应列即得 $\Lambda_1$ 和 $U_1$，$U_1$ 仍然为正交矩阵.

(4)解即为 $X=\mathrm{diag}\{\Lambda_p^{1/2}\},\Lambda_q^{1/2}\}U_1^T$，其中 $\Lambda_p^{1/2}=\mathrm{diag}\{\lambda_1^{1/2},\cdots\lambda_p^{1/2}\}$，$\Lambda_q^{1/2}=\mathrm{diag}\{\lambda_{p+1}^{1/2},\cdots,\lambda_{p+q}^{1/2}\}$.

从算法可以看出，解 $X$ 一般不唯一，因此方程(1)中 $D_\pi$ 一般不唯一.

计算实例.

$$p=1, q=4, S=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&2&3&4\\3&2&1&2&3\\4&3&2&1&2\\5&4&3&2&1\end{bmatrix}.$$

采用本文的算法，(用 Matlab 语言实现)计算出方程(2)的解 $X$ 为

$$X=\begin{bmatrix}1.8350&1.5015&1.3975&1.5015&1.8350\\0.1306&-0.3824&0.4794&-0.3824&0.1306\\-0.3249&0.5257&0.0000&-0.5257&0.3249\\0.5917&-0.3292&-0.8475&-0.3292&0.5917\\1.3764&0.8507&0.0000&-0.8507&-1.3764\end{bmatrix}.$$

## 3　$D_\pi$ 矩阵存在的假设与 DGKF 方法的假设条件 $A_2$ 的关系

这里利用关于方程(1)的可解性结果，研究基于链式散射描述求解 $H^\infty$ 控制问题的 CSD 方法与经典的 DGKF 方法假设条件的联系. 考虑 DGKF[6,8]方法的广义对象

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\z\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{A}&\hat{B}_1&\hat{B}_2\\\hat{C}_1&0&\hat{D}_{12}\\\hat{C}_2&\hat{D}_{21}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\w\\u\end{bmatrix},\quad P(s):=\left[\begin{array}{c|cc}\hat{A}&\hat{B}_1&\hat{B}_2\\\hline\hat{C}_1&0&\hat{D}_{12}\\\hat{C}_2&\hat{D}_{21}&0\end{array}\right].$$

在 DGKF 方法中的假设条件通常可以归纳如下：

A1. $(\hat{A}_2,\hat{B}_2,\hat{C}_2)$ 可镇定和可检测；

A2. $\hat{D}_{12}$ 列满秩，$\hat{D}_{21}$ 行满秩；

A3. $\mathrm{rank}\begin{bmatrix}-j\omega I+\hat{A}&\hat{B}_2\\\hat{C}_1&\hat{D}_{12}\end{bmatrix}=n+p$，　$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}-j\omega I+\hat{A}&\hat{B}_1\\\hat{C}_2&\hat{D}_{12}\end{bmatrix}=n+q$，　$\forall\ \omega\in R$.

设 $D_{21}$ 为可逆方阵，转换为链式散射描述的系统

$$S(s)=\left[\begin{array}{c|cc}\hat{A}-\hat{B}_1\hat{D}_{21}\hat{C}_2 & \hat{B}_2 & \hat{B}_1\hat{D}_{21}^{-1}\\ \hline \hat{C}_1 & \hat{D}_{12} & 0\\ -\hat{D}_{21}^{-1}\hat{C}_2 & 0 & \hat{D}_{21}^{-1}\end{array}\right]:=\left[\begin{array}{c|c}A & B\\ \hline C & D\end{array}\right].$$

由上节和(1)式，$D_\pi$ 存在当且仅当

$$D^TJ_{m,r}D=\begin{bmatrix}\hat{D}_{12}^T\hat{D}_{12} & 0\\ 0 & -(\hat{D}_{21}^{-1})^T\hat{D}_{21}^{-1}\end{bmatrix}$$

有 $p$ 个正的特征值和 $q$ 个负的特征值，也即 $\hat{D}_{12}^T\hat{D}_{12}>0$，$(\hat{D}_{21}^{-1})^T\hat{D}_{21}^{-1}>0$. 这显然满足假设条件 $A_2$.

## 参 考 文 献


[1] 裘聿皇，季红彬. 链式散射描述与线性分式变换. 自动化学报，1994，**20**(2)：146－153.

[2] Ball J A，Cohen N. The sensitivity minimization on an $H^\infty$ norm：parameterization of all optimal solution. *Int. J. Control*，1987，**46**(4)：785－916.

[3] Xin Xin，Feng Chunbo. $(J,J')$-Lossless factorization-revisited. 控制理论与应用，1995，**12**(1)：95－100.

[4] Kimura H. Chain-scattering representation，$J$-lossless factorizaiton and $H^\infty$ control. *Journal of Mathematical System，Estimation and Control*，1994.

[5] 裘聿皇. 用链式散射描述处理 $H^\infty$ 问题. 见：自动化学会第四届学术会议文集，珠海，1993 年 11 月.

[6] Doyle J C *et al*. State-space solution to standard $H^\infty$ and $H^2$ control problems，*IEEE Trans. Automatic Control*，1989，**34**(8)：831－847.

[7] Tsai M C，Postlethwaite I. On $J$-loseless comprime factorization and $H^\infty$ control. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*，1991，**1**(1)：47－68.

[8] Glover K，Doyle J C. State-space formulae for all stabilizing controllers that satify an $H^\infty$-norm bounded and relation to risk sensitivity. *Systems & Control Letters*，1988，**11**：167－172.

[9] H Kwarkernaak. Robust control and $H^\infty$ optimization. *Automatica*，1993，**29**：255－273.


# ON SOME PROBLEMS IN $(J,J')$-LOSELESS FACTORIZATION


QIU YUHUANG ZHANG BENYONG

(*Institute of Automation*，*Chinese Academy of Sciences*，*Beijing* 100080)


**Key words** Chain scattering description，$(J,J')$-loseless factorization，$H^\infty$ control.