



2-D 奇异系统无穷远极点 与状态响应公式¹⁾

杜春玲 杨成梧

(南京理工大学动力工程学院 南京 210094)

摘 要 针对二维奇异系统的一般模型(2-D SGM),提出无穷远极点的概念,进而探讨了无穷远极点与状态响应公式的关系,给出状态响应公式成立的充要条件.

关键词 2-D 奇异系统,无穷远极点,状态响应公式.

1 引言

自 Roesser 等人提出 2-D Roesser 模型(2-D RM)以来,Attasi, Fornasini 和 Marchesini 先后在不同背景下提出更为一般的模型,而 Kurek 则集前人之大成,从理论上抽象概括出最为一般的 2-D 状态空间模型(2-D GM). 自这几种较为流行的二维系统模型被推广为奇异模型以来,使奇异系统的发展已颇具规模,其应用前景也十分广阔,诸如应用于图象处理等领域. 然而,到目前为止尚未有人提出 2-D 奇异系统无穷远极点这一重要问题. 对其状态响应的研究,以 Kaczorek 为代表,在文献[1—3]中作了大量工作,但并没有考虑到无穷远极点问题. 而无穷远极点的性质决定了其所推导的状态响应公式的成立与否.

2 2-D SGM 无穷远极点定义

考虑 2-D SGM

$$Ex(i+1, j+1) = A_0x(i, j) + A_1x(i+1, j) + A_2x(i, j+1) + B_0u(i, j) + B_1u(i+1, j) + B_2u(i, j+1), \quad (1)$$

$$y(i, j) = Cx(i, j) + Du(i, j). \quad (2)$$

边界条件为 $x(i, 0), x(0, j), (i, j) \geq (0, 0)$ 为二元整值坐标; x, u, y , 分别为状态、输入和输出向量, $x \in R^n$; E, A_i, B_i, C, D 分别为各具适当维数的常值实矩阵, 且 $\det E = 0, E, A_i$ 满足正则束条件

1)国家自然科学基金资助项目.

$$\det(z_1 z_2 E - A_0 - z_1 A_1 - z_2 A_2) \neq 0. \quad (3)$$

定义 1. 称 $(0,0)$ 为系统(1)的无穷远及左侧无穷远和右侧无穷远极点系指,当 $(z_1, z_2) = (0,0)$ 及 $(\lambda,0)$ 和 $(0,\mu)$ 时有

$$\det(E - z_2 A_1 - z_1 A_2 - z_1 z_2 A_0) = 0. \quad (4)$$

3 2-D 多项式的零点性质

定义 2. 称 2-D 多项式 $f(z_1, z_2) \in R[z_1, z_2]$ 关于 $z_1=0$ (或 $z_2=0$) 是本原的,系指

$$f(0, z_2) \neq 0 \quad (\text{或 } f(z_1, 0) \neq 0). \quad (5)$$

而称 $f(z_1, z_2)$ 关于原点 $(0,0)$ 是本原的,系指它关于 $z_1=0, z_2=0$ 均为本原的. 这里 $R[z_1, z_2]$ 为 z_1, z_2 的实系数多项式环.

引理 1. 设 2-D 多项式 $f(z_1, z_2) \in R[z_1, z_2]$ 关于 $z_2=0$ 是本原的,如果 $f(0,0)=0$, 则对于 $\epsilon > 0$ 充分小,就 $\exists \delta > 0$,使得对 $\forall |z_2| < \delta$, 在 $|z_1| < \epsilon$ 内均至少存在一点 $z_1 = \varphi(z_2)$, 有

$$f(\varphi(z_2), z_2) = 0. \quad (6)$$

证明. 将 $f(z_1, z_2)$ 视为 1-D 多项式环 $R[z_2][z_1]$ 中的元,则由 $f(z_1, 0) \neq 0$ 及 $f(0,0) = 0$ 知:(i) $f(z_1, 0)$ 至少存在一个零点 $z_1=0$; (ii) 零点 $z_1=0$ 是孤立的,从而只要 $\epsilon > 0$ 充分小,由 2-D 多项式的连续性和 $|z_1| = \epsilon, |z_2| \leq r (r > 0)$ 的紧性知,只要取 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ 充分小,就有

$$|f(z_1, z_2)| \geq C > 0, |z_1| = \epsilon, |z_2| < \delta. \quad (7)$$

由此及解析函数零点个数定理^[4]知,对 $|z_2| < \delta, f(z_1, z_2) \in R[z_2][z_1]$ 在 $|z_1| < \epsilon$ 内的零点个数为

$$n(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z_1|=\epsilon} \frac{f'_{z_1}(z_1, z_2)}{f(z_1, z_2)} dz_1. \quad (8)$$

此式表明 $n(z_2)$ 在 $|z_2| \leq \delta$ 内是 z_2 的连续函数^[5], 但 $n(z_2)$ 取整数值且 $n(0)$ 至少为 1. 证毕.

推论 1. 若 2-D 多项式 $f(z_1, z_2) \in R[z_1, z_2]$ 关于 $(0,0)$ 是本原的,且 $f(0,0)=0$, 则对 $\forall r > 0$ 必有 $\lambda_0, \mu_0, 0 < |\lambda_0| \leq r, 0 < |\mu_0| \leq r$, 使得

$$f(\lambda_0, \mu_0) = 0. \quad (9)$$

推论 2. 设 2-D 多项式 $f(z_1, z_2) \in R[z_1, z_2]$ 关于 $(0,0)$ 是本原的,则对 $\forall r > 0$,

$$f(z_1, z_2) \neq 0 \quad (0 < |z_1| \leq r, 0 < |z_2| \leq r) \quad (10)$$

与

$$f(z_1, z_2) \neq 0 \quad (|z_1| \leq r, |z_2| \leq r) \quad (11)$$

等价. 证明由推论 1 直接可得.

推论 3. 设 $f(z_1, z_2) \in R[z_1, z_2]$, 则必有 $\bar{f}(z_1, z_2) \in R[z_1, z_2]$, 使得

$$f(z_1, z_2) = z_1^{n_1} z_2^{n_2} \bar{f}(z_1, z_2). \quad (12)$$

其中 $\bar{f}(z_1, z_2)$ 关于 $(0,0)$ 本原, 且

$$f(z_1, z_2) \neq 0, 0 < |z_1| \leq r, 0 < |z_2| \leq r. \quad (13)$$

当且仅当

$$\bar{f}(z_1, z_2) \neq 0, |z_1| \leq r, |z_2| \leq r. \quad (14)$$

证明由 2-D 多项式本原分解定理^[6]及推论 2 即得.

4 无穷远极点与状态的响应公式

由(12)式知,(4)式左端必能表示成 $z_1^{n_1} z_2^{n_2} \bar{f}(z_1, z_2)$ 的形式,此时称 $f(z_1, z_2)$ 具有容度 $z_1^{n_1} z_2^{n_2}$ ^[7], $(n_1, n_2) \leq (n, n)$.

定义 3. 设 $f(z_1, z_2)$ 具有容度 $z_1^{n_1} z_2^{n_2}$, 称系统(1)的无穷远极点是正则(或非奇异)的,系指 $\bar{f}(0, 0) \neq 0$, 此时正则无穷远极点的阶数定义为 (n_1, n_2) .

引理 2. 2-D SGM 的特征矩阵

$$G(z_1, z_2) = (z_1 z_2 E - z_1 A_1 - z_2 A_2 - A_0) \quad (15)$$

的逆可展为

$$G^{-1}(z_1, z_2) = \sum_{p=-n_1+1}^{\infty} \sum_{q=-n_2+1}^{\infty} T_{p,q} z_1^{-p} z_2^{-q} \quad (0 \leq n_1, n_2 \leq n), \quad (16)$$

当且仅当系统(1)具有 (n_1, n_2) 阶正则无穷远极点.

证明.

充分性. 设(1)式具有 (n_1, n_2) 阶正则无穷远极点, 则由 $\bar{f}(z_1, z_2)$ 的连续性知, 存在充分小的 $r > 0$, 使得

$$\bar{f}(z_1, z_2) \neq 0, |z_1| \leq r, |z_2| \leq r. \quad (17)$$

从而

$$\begin{aligned} z_1^{-n_1+1} z_2^{-n_2+1} G^{-1}(z_1, z_2) &= z_1^{-n_1} z_2^{n_2} (E - z_2^{-1} A_1 - z_1^{-1} A_2 - z_1^{-1} z_2^{-1} A_0) \\ &= \frac{\text{adj}(E - z_2^{-1} A_1 - z_1^{-1} A_2 - z_1^{-1} z_2^{-1} A_0)}{\bar{f}(z_1^{-1}, z_2^{-1})} \end{aligned} \quad (18)$$

在 $|z_1^{-1}| \leq r, |z_2^{-1}| \leq r$ 内解析, 则(18)式左端可展为

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} T_{p,q} z_1^{-p} z_2^{-q}. \quad (19)$$

于是 $G^{-1}(z_1, z_2)$ 可表示为(16)式的形式.

必要性. 设 G^{-1} 可展为(16)式, 则易知, 如有 $\lambda_0^{-1}, \mu_0^{-1}$ 使得(16)式收敛, 则幂级数

$$\lambda_0^{-n_1} \mu_0^{-n_2} \sum_{p=-n_1}^{\infty} \sum_{q=-n_2}^{\infty} T_{p,q} \lambda_0^p \mu_0^q. \quad (20)$$

亦收敛, 从而 $z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} G^{-1}(z_1, z_2)$ 在 $|z_1| \leq |\lambda_0|, |z_2| \leq |\mu_0|$ 内解析, 这里 $\bar{n}_k = n_k - 1$. 另一方面, 若设系统(1)具有容度 $z_1^{n_1}, z_2^{n_2}$, 则若系统(1)存在奇异无穷远极点, 则由(18)式及推论 1 知, 这与 $z_1^{-\bar{n}_1} z_2^{-\bar{n}_2} G^{-1}(z_1, z_2)$ 在 $(0, 0)$ 域内的解析性矛盾, 因此系统(1)必不存在奇异无穷远极点.

由此, 可得如下重要结论.

定理. Kaczorek^[3] 给出的 2-D SGM 的状态响应公式成立, 当且仅当该 2-D SGM 不存在奇异无穷远极点.

至此, 不难导出存在奇异无穷远极点下的 2-D SGM 的状态响应公式, 限于篇幅从略.

参 考 文 献

- [1] Kaczorek T. The singular general model of 2-D systems and its solution. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1988, **33**(8):1060—1061.
- [2] Kaczorek T. Existence and uniqueness of solution and Caley-Hamilton theorem for general singular model of 2-D systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sci., Tech.*, 1989, **36**(2):275—278.
- [3] Kaczorek T. General formula and minimum energy control for the general singular model of 2-D systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1990, **35**(4):433—436.
- [4] 余家荣. 复变函数, 北京: 人民教育出版社, 1980, 124—126.
- [5] Svashnikov A, Tikhonov A. The theory of functions of a complex variable. Moscow: Mir Publishers, 1978, 53—54.
- [6] 杨成梧, 邹云. 2-D 线性离散系统. 北京: 国防工业出版社, 1995, 298—302.

INFINITE POLE AND STATE RESPONSE FORMULA FOR 2-D SINGULAR SYSTEMS

DU CHUNLING YANG CHENGWU

(School of Power Engineering & Dynamics, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094)

Abstract This paper presents the concept of the infinite pole for 2-D singular systems. The relationship between the infinite pole and the state response formula is discussed. And a sufficient and necessary condition for the state response formula to be tenable is given.

Key words 2-D singular systems, infinite pole, state response formula.