第 23 卷 第 6 期
1997 年 11 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 23, No. 6
Nov., 1997

短 文

n 中取相邻 $n-1$ 好的可修系统的可靠性分析[1)]

张元林　　汪太鹏
(东南大学应用数学系　南京　210018)

贾积身
(河南机电专科学校　新乡　453002)

摘要　研究了 n 中取相邻 $n-1$ 好的直列可修系统，假定每个部件的工作时间和维修时间都是指数分布且故障部件能"修复如新"时，求出了该系统的可靠度和首次故障前的平均时间等可靠性指标的精确表达式.

关键词　n 中取相邻 k 好或坏可修系统，Markov 过程，可靠度，首次故障前的平均时间.

1　引言

n 种取相邻 k 好或坏系统(简称为相邻 $n-k(G/F)$ 系统)是指由 n 个部件有序地排成直线(即直列)或环形，系统正常或失效当且仅当有相邻 k 个或 k 个以上部件正常或失效. 这是 80 年代初由 Kontoleon[1]提出的一个新模型，它有着较强的工程背景. Chiang 和 Niu[2]在 n 个部件独立、可靠度相同时，给出了相邻 $n-k(F)$ 系统的可靠度的递推公式及相邻 $n-2(F)$ 系统的可靠度的精确公式. 从此，相邻 $n-k(G/F)$ 系统的研究为大家所关注[3-8].

10 多年来，虽然该模型已用于象街灯系统、输油泵站系统、微波塔系统、卫星中继通讯系统及集成电路设计等工程领域，但该系统是可修的情形尚未发现有人研究(文献[6]中"街灯照明系统维修策略"的提法是广义的，因为街灯失效后仅作了事后更换而未进行维修，这对于价值昂贵的可以维修的部件来说，显然是不合适的). 本文在 $k=n-1$ 时，研究相邻 $n-k(G)$ 直列可修系统，求出了该系统的可靠度、首次故障前的平均时间等可靠性指标的精确表达式.

2　模型假设

1) 设相邻 $n-n-1(G)$ 直列可修系统只有一个维修工，当系统故障时维修工立即对故障部件进行维修，而未故障的部件不工作也不再发生故障；且假定不可能有两个或两个以上部件同时发生故障. 当一个部件在维修时，另一部件也故障，则必须等待到正在维修

1) 国家自然科学基金及江苏省自然科学基金资助项目.
收稿日期 1995-07-03

的部件维修完毕，另一部件才能获得维修；一旦故障部件维修到满足该系统的构成规则时，系统重新工作.

2) 设 n 个部件为同型部件. 若第 i 个部件的工作时间 X_i 和维修时间 Y_i 分别服从参数为 λ 和 μ 的指数分布，其分布函数分别为 $F(t)=1-e^{-\lambda t}$和 $G(t)=1-e^{-\mu t}$, $t\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,n$.

3) 设故障部件能"修复如新"且服从"先坏先修"的原则.

4) $X_i,Y_i(i=1,2,\cdots,n)$为相互独立的随机变量.

5) 在 $t=0$ 时，假设部件都是新的.

3 模型分析

令 $N(t)$为系统在 t 时刻所处的状态，则

$$N(t)=\begin{cases} 0, & t \text{ 时刻无故障部件，系统正常；} \\ -1, & t \text{ 时刻有一个部件故障，系统正常；} \\ 1, & t \text{ 时刻有一个部件故障，系统故障；} \\ 2, & t \text{ 时刻有二个部件故障，系统故障.} \end{cases}$$

显然，$\{N(t),t\geqslant 0\}$构成一个连续时间有限齐次 Markov 链，其状态空间 $E=\{0,-1,1,2\}$，工作状态集 $W=\{0,-1\}$，故障状态集 $F=\{1,2\}$. 因此，不难得到该系统的状态转移概率. 令

$p_{ij}(\Delta t)=P_r\{N(t+\Delta t)=j/N(t)=i\}$, $\forall\ i,j\in E$，则有

$p_{0-1}(\Delta t)=2\lambda\Delta t+o(\Delta t)$, $p_{01}(\Delta t)=(n-2)\lambda\Delta t+o(\Delta t)$,

$p_{02}(\Delta t)=o(\Delta t)$, $p_{00}(\Delta t)=1-n\lambda\Delta t+o(\Delta t)$;

$p_{-10}(\Delta t)=\mu\Delta t+o(\Delta t)$, $p_{-11}(\Delta t)=o(\Delta t)$,

$p_{-12}(\Delta t)=(n-1)\lambda\Delta t+-(\Delta t)$, $p_{-1-1}(\Delta t)=1-[(n-1)\lambda+\mu]\Delta t+o(\Delta t)$;

$p_{10}(\Delta t)=\mu\Delta t+o(\Delta t)$, $p_{1-1}(\Delta t)=o(\Delta t)$,

$p_{12}(\Delta t)=o(\Delta t)$, $p_{11}(\Delta t)=1-\mu\Delta t+o(\Delta t)$;

$p_{20}(\Delta t)=(\Delta t)$, $p_{21}(\Delta t)=\frac{1}{n-1}(n-2)\mu\Delta t+o(\Delta t)$,

$p_{2-1}(\Delta t)=\frac{1}{n-1}\mu\Delta t+o(\Delta t)$, $p_{22}(\Delta t)=1-\mu\Delta t+o(\Delta t)$.

值得注意的是，如系统处于状态 i 有多种可能的情形，则系统处于状态 i 的第 l 种情形转移到状态 j 的条件概率与系统处于状态 i 的第 m 种情形转移到状态 j 的条件概率一般不相等. 对于同型部件构成的系统，则系统处于状态 i 的每一种情形相等是可能的. 如果注意到这一点，则上述转移概率不难求得. 例如

$$\begin{aligned} p_{21}(\Delta t) &= \frac{1}{2(n-1)}[(n-2)\mu\Delta t+(n-2)\mu\Delta t]+o(\Delta t) \\ &= \frac{1}{n-1}(n-2)\mu\Delta t+o(\Delta t). \end{aligned}$$

由连续时间 Markov 链的性质[9]，不难写出其转移率矩阵(或称为 Q 矩阵)

$$Q=(q_{kj})=\begin{pmatrix} -n\lambda & 2\lambda & (n-2)\lambda & 0 \\ \mu & -[(n-1)\lambda+\mu] & 0 & (n-1)\lambda \\ \mu & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{n-1}\mu & \frac{n-2}{n-1}\mu & -\mu \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中 $q_{kj}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{P_{kj}(\Delta t)}{\Delta t}$（$k\neq j,\ k,\ j\in E$），$q_j=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{1-P_{jj}(\Delta t)}{\Delta t}$（$j\in E$），$A=\begin{pmatrix} -n\lambda & 2\lambda \\ \mu & -[(n-1)\lambda+\mu] \end{pmatrix}$.

为求该系统的可靠度等可靠性指标，令

$$p_j(t)=P\{N(t)=j\},\ j\in E.$$

根据 Fokker-Planck 方程，有

$$p'_j(t)=\sum_{k\in E}p_k(t)q_{kj},\ j\in E, \quad (2)$$

其初始条件

$$p_0(0)=1, p_i(0)=0, i=-1,1,2. \quad (3)$$

由(1)，(2)及(3)式知，其矩阵形式为

$$\begin{cases} P'(t)=P(t)Q, \\ \text{初始条件 } P(0). \end{cases} \quad (4)$$

其中 $P(t)=(p_0(t),p_{-1}(t),p_1(t),p_2(t))$；$P'(t)=(p'_0(t),p'_{-1}(t),p'_1(t),p'_2(t))$；$P(0)=(p_0(0),p_{-1}(0),p_1(0),p_2(0))$.

为求系统的可靠度，只须解如下方程组[10]

$$\begin{cases} (p'_0(t),p'_{-1}(t))=(p_0(t),p_{-1}(t))A, \\ \text{初始条件 } p_0(0)=1, p_{-1}(0)=0. \end{cases} \quad (5)$$

若记 $p_j(t)$ 的 Laplace 变换为 $p_j^*(s)=\int_0^\infty p_j(t)e^{-st}\mathrm{d}t$. 现对(5)式两边取 Laplace 变换，可得

$$-1+sp_0^*(s)=-n\lambda p_0^*(s)+\mu p_{-1}^*(s),$$
$$sp_{-1}^*(s)=2\lambda p_0^*(s)-[(n-1)\lambda+\mu]p_{-1}^*(s).$$

从而解得

$$p_0^*(s)=\frac{s+(n-1)\lambda+\mu}{s^2+[(2n-1)\lambda+\mu]s+(n-2)\lambda\mu+(n-1)n\lambda^2}, \quad (6)$$

$$p_{-1}^*(s)=\frac{2\lambda}{s^2+[(2n-1)\lambda+\mu]s+(n-2)\lambda\mu+(n-1)n\lambda^2}. \quad (7)$$

对(6)，(7)二式分别取 Laplace 逆变换，可得

$$p_0(t)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu-\lambda}{\sqrt{\lambda^2+6\lambda\mu+\mu^2}}\right)e^{s_1t}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda-\mu}{\sqrt{\lambda^2+6\lambda\mu+\mu^2}}\right)e^{s_2t}, \quad (8)$$

$$p_{-1}(t)=\frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda^2+6\lambda\mu+\mu^2}}(e^{s_1t}-e^{s_2t}). \quad (9)$$

其中 s_1,s_2 为方程 $s^2+[(2n-1)\lambda+\mu]s+(n-2)\lambda\mu+(n-1)n\lambda^2=0$ 的两个根

$$s_1=-\frac{1}{2}[(2n-1)\lambda+\mu]+\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2+6\lambda\mu+\mu^2},$$

$$s_2 = -\frac{1}{2}[(2n-1)\lambda + \mu] - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2}.$$

4 系统可靠度及首次故障前的平均时间

1）按 $R(t)$ 定义，由(8)，(9)二式知系统可靠度

$$R(t) = \sum_{j\in w} p_j(t) = p_0(t) + p_{-1}(t)$$
$$= \frac{1}{s_1 - s_2}[(s_1 + (n-2)\lambda)e^{s_2 t} - (s_2 + (n-2)\lambda)e^{s_1 t}]. \tag{10}$$

2）按 MTTFF 的定义，由(6)，(7)二式知系统首次故障前的平均时间

$$t_{\mathrm{MTF}} = \lim_{s\to 0} R^*(s) = \lim_{s\to 0}(p_0^*(s) + p_{-1}^*(s))$$
$$= \frac{(n+1)\lambda + \mu}{(n-2)\lambda\mu + (n-1)n\lambda^2} \tag{11}$$

可以发现，当 $\mu=0$ 时，系统为不可修情形. 此时，(8)，(9)二式分别成为

$$\widetilde{p}_0(t) = e^{-n\lambda t}, \tag{12}$$
$$\widetilde{p}_{-1}(t) = 2(e^{-(n-1)\lambda t} - e^{-n\lambda t}). \tag{13}$$

其可靠度为

$$\widetilde{R}(t) = \widetilde{p}_0(t) + \widetilde{p}_{-1}(t) = 2e^{-(n-1)\lambda t} - e^{-n\lambda t}; \tag{14}$$

首次故障前的平均时间为

$$t_{\mathrm{MTF}} = \frac{n+1}{(n-1)n\lambda}. \tag{15}$$

由模型假设 2)知，每一个部件的可靠度 $p=e^{-\lambda t}$，则上述(14)式的结果正是文献[6]中公式

$$R = \prod_{i=1}^{k} p_i + \sum_{i=1}^{n-k}(\bar{p}_i \prod_{j=i+1}^{i+k} p_j)$$

当 $k=n-1$ 时的结果. 由此可见，本文在 $k=n-1$ 时，将此类不可修情形推进到可修情形.

参 考 文 献

[1] Kontoleon J M. Reliability determination of a r-successive-out-of-n:F system. *IEEE Trans. Rel*, 1980, **29**:437.

[2] Chiang D T, Niu S C. Reliability of consective-k-out-of-n:F system. *IEEE Trans. Rel.*, 1981, **30**:87－89.

[3] Derman C, Lieberman G J, Ross S M. On the consective-k-out-of-n:F system. *IEEE Trans. Rel.*, 1982, **31**:57－63.

[4] Ge G P, Wang L S. Exact reliability formula for consective-k-out-of-n:F system with homogeneous Markov dependence. *IEEE Trans. Rel.*, 1990, **39**:600－602.

[5] 廖炯生. "n 中取连续 k 则失效"的环形系统可靠性一般计算公式. 科学通报，1985，**24**:1862－1865.

[6] 廖炯生. n 中取相邻 k 系统可靠性及街灯照明系统维修策略. 自动化学报，1992，**18**(3):343－347.

[7] 阎春宁，史定华. n 中取连续 k 系统. 自动化学报，1988，**14**(4):311－319.

[8] 葛广平. 关于 n 中取连续 k 系统. 数学进展，1993，**22**:306－311.

[9] 复旦大学编. 概率论(第三册)，北京：人民教育出版社，1981.

[10] 曹晋华，程侃. 可靠性数学引论. 北京：科学出版社，1986.

RELIABILITY ANALYSIS OF CONSECUTIVE $N-1$-OUT-OF-N: G REPAIRABLE SYSTEM

ZHANG YUANLIN WANG TAIPENG
(*Dept. of Applied Mathematics, Southeast University, Nanjing* 210018)

JIA JISHEN
(*Henan Mechanic and Electric Engineering College, Xinxiang* 453002)

Abstract In this paper, a linear consecutive n－1-out-of-n: G repairable system is studied. Assuming that the working time and repair time of each component are both exponentially distributed and that each component after repair is as good as new, we derive the exact expressions of the reliability and MTTFF of the repairable system. It is easy to know the irrepairable corresponding system is a special case of this paper.

Key words Consecutive-k-out-of-n: (G or F) repairable system, Markov process, reliability, MTTFF.

《智能控制——基础及应用》出版

蔡自兴教授的专著《智能控制——基础及应用》已由国防工业出版社出版. 该书通过中国国防出版基金评审委员会评审后,由该基金资助出版.

本书涉及智能控制的基本概念、原理、方法、技术及其应用,着重阐述智能控制的五个典型系统的原理、方法及应用. 全书共八章. 第一章简述智能控制的产生背景、起源与发展,讨论智能控制的定义、特点和智能控制的四元交集结构理论,揭示各相关学科间的内在联系. 第二章至第六章逐章讨论了递阶控制系统、专家控制系统、模糊控制系统、神经控制系统和学习控制系统的作用机理、类型结构、设计要求、控制特性和应用示例. 对于不同的系统,每章研究的侧重点也有所区别. 第七章概括智能控制的主要应用领域,指出智能控制应用研究中存在的一些问题. 最后一章,即第八章,展望智能控制的发展方向及其与相关技术的关系.

本书相当大一部分内容是作者及其研究组成员们近年来的研究成果;加上其它新内容,本书较好地反映出国内外智能控制研究和应用最新进展,与蔡自兴教授的另一著作《智能控制》(电子工业出版社,1990,为全国高校统编教材,也是国内外第一部智能控制教材,1996 年曾获中国第三届优秀教材一等奖)相比,有 85%以上内容得以更新,水平也有明显提高.

中国科学院技术科学部副主任、国家攀登计划"思维与智能模拟"研究领域首席科学家戴汝为院士在百忙中为本书作序,对本书及其作者给予很高评价. 戴院士在论述复杂系统的研究之后指出:"这本书的作者蔡自兴教授,多年从事自动控制、人工智能等方面的科研与教学工作,并曾在美国普渡大学,在傅京孙教授指导的科研集体中工作过. 他根据自己的心得体会,以辛勤的劳动完成了这一专著. 这本书较全面地涉及递阶控制、专家控制、模糊控制、神经控制和学习控制系统;材料新颖,反映了国内外智能控

(下转第 796 页)