



一种新型状态 PI 调节器的研究

宋文忠 蒋国平

(东南大学自动化研究所 南京 210096)

摘 要 提出一种新的状态 PI 调节器,证明了其最优调节器性质,并分析了它的鲁棒性. 通过参数集结,使状态 PI 调节器具有类似于 PID 调节器的参数整定方法.

关键词 状态 PI 调节器,参数集结,最优性,鲁棒性.

1 引言

自从 1922 年美国米诺尔斯基提出 PID 调节器以来^[1], 由于其结构的简单性、参数的易调性和良好的适应能力,至今仍然是生产过程自动化中使用最多的一种调节器. 但 PID 调节器不是最优调节器,且鲁棒性也还不够强,因此在控制要求高或对象特性变化大的场合常难以满足质量要求,有时甚至无法正常工作. 1960 年卡尔曼提出了状态反馈调节器^[2],这是一种最优调节器,并且在理论上具有 $0.5 \sim \infty$ 的增益裕度和至少 60° 的相位裕度等优点. 但是,设计状态调节器要求知道对象的精确数学模型,并且控制参数较多(一般与系统阶次相同),当真实的对象特性与设计时使用的标称模型不符时,很难对调节器参数进行现场调整. 因此,状态调节器至今并没有在工业自动化中得到推广应用. 本文综合了上述两种调节器的优点,给出了一种在结构上与常规 PI 调节器相似的状态 PI 调节器——SPI 调节器,它既保持了状态调节器的最优调节器性质和良好的鲁棒性,又通过参数集结,使该调节器具有类似于 PID 调节器的参数整定方法,易于现场使用.

2 SPI 调节器的结构及其最优调节器性质

设传递函数为 $W_p(s)$ 的 SISO 系统的一个最小实现为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \quad (1)$$

式中 $x \in R^n; u \in R; y \in R; (A, B, C)$ 为具有相应尺度的三矩阵组,且 (A, B) 可控, (A, C) 可观.

SPI 调节器的算式为

$$\begin{aligned}\bar{u} &= k_p(D^T \mathbf{x} - y_0) + k_i \int (y - y_0) dt \\ &= \frac{1}{\delta} [(D^T \mathbf{x} - y_0) + \frac{1}{T_i} \int (y - y_0) dt].\end{aligned}\quad (2)$$

其中 y_0 为给定值, $\bar{u} = u - u_0$ 为控制增量, u_0 为与 y_0 相对应的控制稳态值, $\delta = \frac{1}{k_p}$ 为 SPI 调节器的比例带, $T_i = \frac{k_p}{k_i}$ 为 SPI 调节器的积分时间, $D^T = [d_1 \cdots d_n]$ 为状态变量反馈系数. SPI 调节器的控制结构如图 1 所示. 如果在(2)式中用 y 替代 $D^T \mathbf{x}$, 就蜕化成常规 PI 调节器.

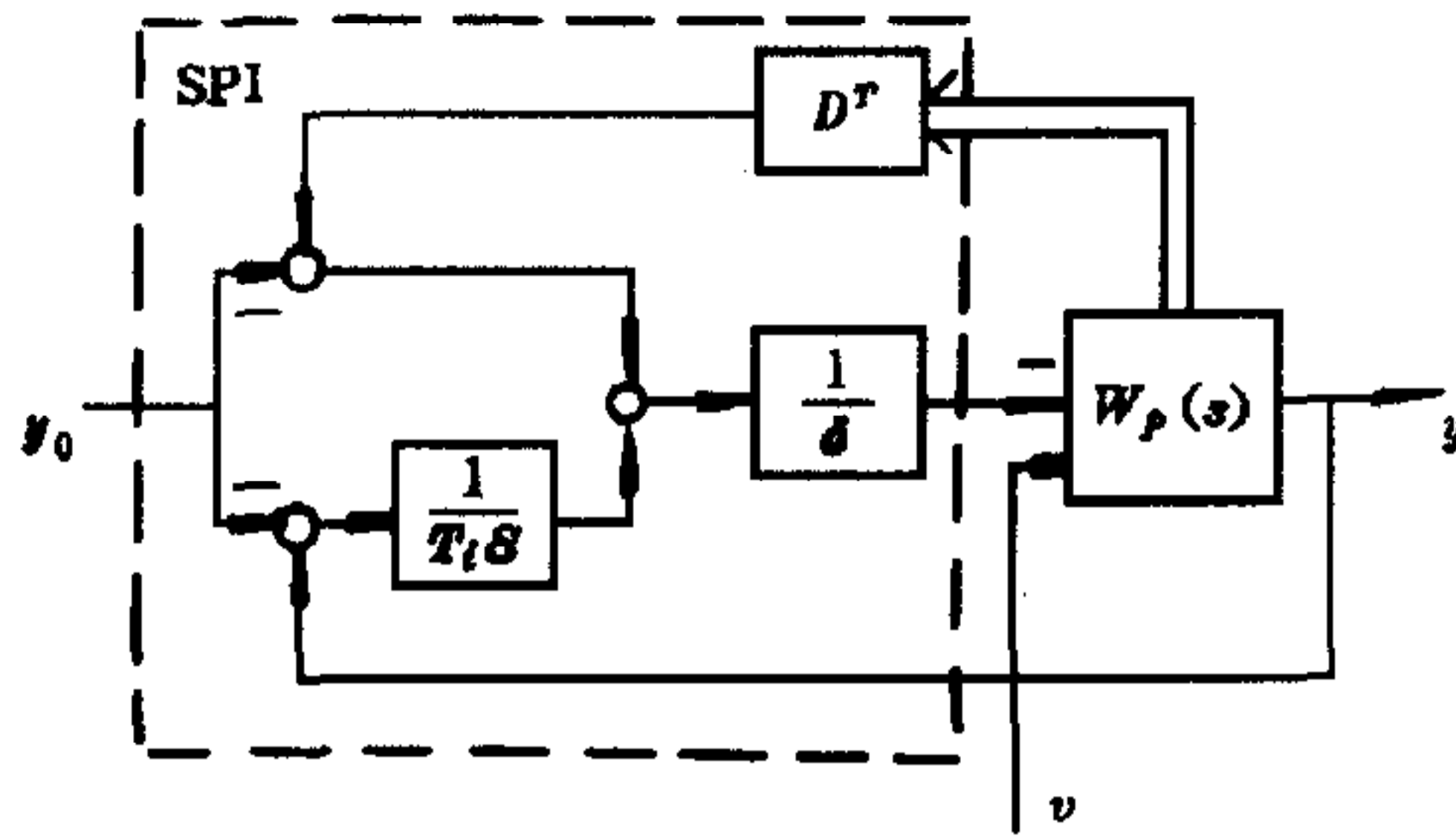


图 1 SPI 控制结构图

定理 1. SPI 调节器具有二次型性能指标最优状态反馈调节器性质.

证明. 把(1)式改写成如下增量形式

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = A\bar{\mathbf{x}} + B\bar{u}, \\ \bar{y} = C\bar{\mathbf{x}}. \end{cases}\quad (3)$$

其中 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, $\bar{y} = y - y_0$, \mathbf{x}_0 为与 y_0 相对应的系统状态变量稳态值. 对(3)式求导, 并写成增广矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{x}}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\bar{u}} = \bar{A} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} + \bar{B} \dot{\bar{u}}.\quad (4)$$

给定二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} + \dot{\bar{u}}^T R \dot{\bar{u}} \right\} dt,\quad (5)$$

其中 $Q = H^T H \geq 0$, $R > 0$, (A, H) 可观. 根据规范型状态调节器理论, 可得到最优控制规律

$$\dot{\bar{u}} = K \cdot \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} = K_1 \dot{\bar{\mathbf{x}}} + k_2 \dot{\bar{y}},\quad (6)$$

其中 $K = [K_1 \quad k_2]$. 对(6)式积分可得

$$\bar{u} = K_1 \bar{\mathbf{x}} + k_2 \int \dot{\bar{y}} dt = K_1 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + k_2 \int (y - y_0) dt,\quad (7)$$

其中 $K_1 = [k_{11} \cdots k_{1n}]$, k_2 为标量.

当系统处于稳态时, 由(1)式可得

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \end{bmatrix}.\quad (8)$$

当 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ 可逆时, 则有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

令 $[\alpha_1 \cdots \alpha_n \alpha_{n+1}]^T$ 为 M^{-1} 的最右一个列向量, 则

$$\mathbf{x}_0 = [\alpha_1 \cdots \alpha_n]^T \cdot y_0 = E \cdot y_0, \quad (10)$$

其中 $E = [\alpha_1 \cdots \alpha_n]^T$.

把(10)式代入(7)式得

$$\begin{aligned} \bar{u} &= K_1(\mathbf{x} - E \cdot y_0) + k_2 \int (y - y_0) dt \\ &= K_1 \mathbf{x} - \left(\sum_{i=1}^n k_{1i} \alpha_i \right) y_0 + k_2 \int (y - y_0) dt \\ &= \sum_{i=1}^n k_{1i} \alpha_i \cdot \left[\left[\frac{K_1}{\sum_{i=1}^n k_{1i} \alpha_i} \mathbf{x} - y_0 \right] + \frac{k_2}{\sum_{i=1}^n k_{1i} \alpha_i} \int (y - y_0) dt \right]. \end{aligned}$$

令 $\delta = 1 / \sum_{i=1}^n k_{1i} \alpha_i$, $T_i = 1 / (\delta k_2)$, $D^T = K_1 \delta$, 则上式可写成

$$\bar{u} = \frac{1}{\delta} \left[(D^T \mathbf{x} - y_0) + \frac{1}{T_i} \int (y - y_0) dt \right]. \quad (11)$$

证毕.

引理 1^[3]. 如果 (A, B) 可控, 则有 (\bar{A}, \bar{B}) 可控 \Leftrightarrow 矩阵 M 可逆.

因此, 当对象可控时, 矩阵 M 可逆是 SPI 调节器具有二次型最优调节器性质的充要条件.

定理 2. 当被控对象传递函数不存在位于原点的零点时, 矩阵 M 可逆. (证明从略)

下面通过一个例子对 SPI 调节器和 PID 调节器进行比较.

设被控对象的传递函数为

$$W_p(s) = \frac{1}{s(s+1)^5}. \quad (12)$$

选择加权阵 $R = 55$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$, 可以求得 SPI 调节器的最优控制参数 $\delta = 0.9$, $T_i =$

8.1, $D^T = [0.12 \quad 0.12 \quad 0.12 \quad 0.12 \quad 0.12 \quad 0.44]$. 系统响应曲线示于图 2, 其中(a)和(b)分别表示给定值发生单位阶跃变化和输入端发生阶跃扰动($V = 0.2$)时的系统响应曲线. 图中 u_1 和 y_1 为用 SPI 调节器的响应曲线; u_2 和 y_2 为用参数经过优化后的 PID 调节器^[4]的响应曲线. 显然 SPI 调节器的控制效果要优于 PID 调节器.

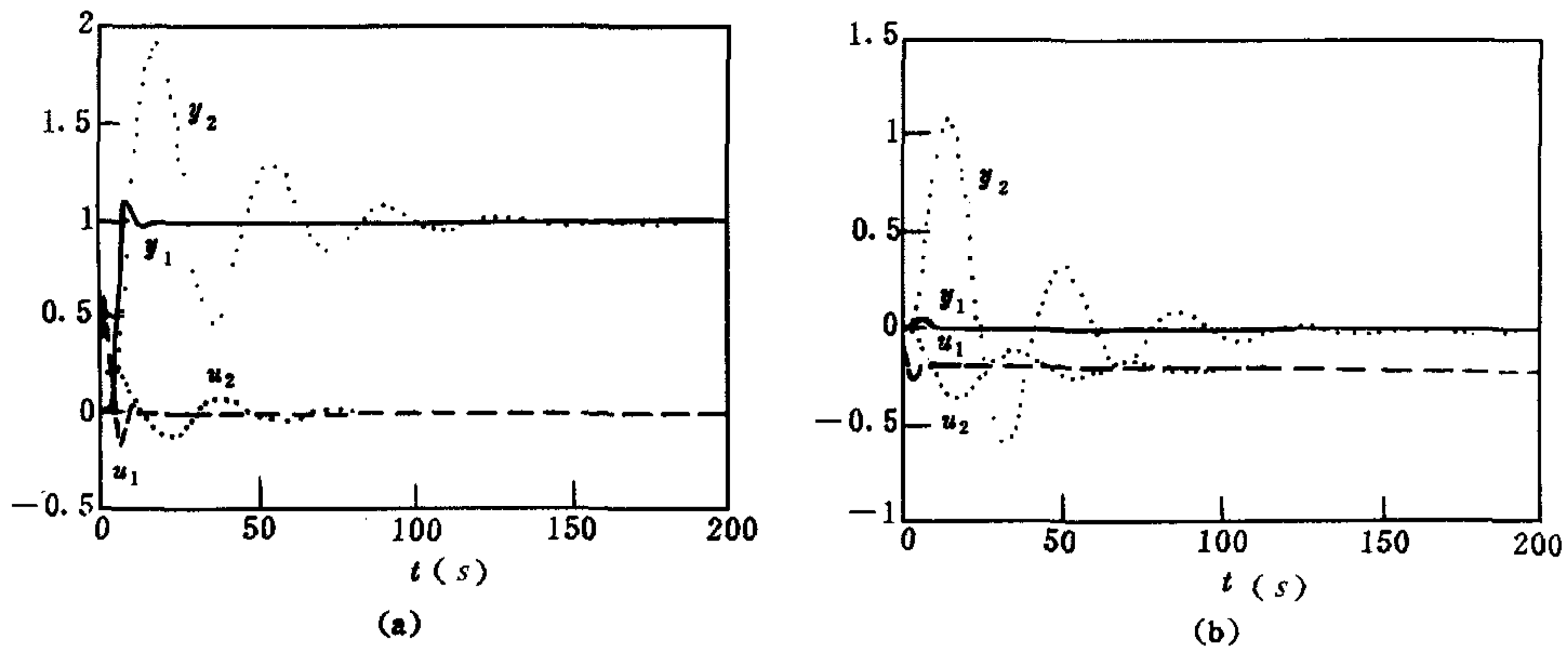


图 2 系统响应曲线

3 SPI 调节器参数集结与调整方法

本节以工业控制中最常遇到的两类典型对象为例,讨论 SPI 调节器参数的集结方法,给出了一套类似于 PID 调节器参数整定方法.

3.1 P 型对象

P 型对象的典型传递函数为

$$W_p(s) = \frac{k}{(Ts + 1)^n}. \quad (13)$$

将(13), (2)式相乘,并经 $S = Ts$ 和 $\bar{\delta} = \frac{\delta}{k}$ 变换后得

$$\begin{aligned} y(S) &= W_p(S) \cdot \bar{u}(S) \\ &= \frac{1}{(S + 1)^n} \cdot \frac{1}{\bar{\delta}} \left[(D^T \mathbf{x}(S) - y_0(S)) + \frac{1}{\bar{T}_i S} (y(S) - y_0(S)) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\bar{T}_i = T_i/T$.

从(14)式可知,P 型对象已变成归一化典型型

$$W_p(S) = \frac{1}{(S + 1)^n}, \quad (15)$$

即只剩下一个结构变量——阶次 n . SPI 调节器也变成相应的归一化典型型,即 $n+2$ 个归一化整定参数与对象参数 (k, T) 无关,只是阶次 n 的函数.

为了实用的方便,下面给出一种计算 SPI 调节器归一化参数的工程方法($n=2 \sim 12$).

$$\begin{cases} \bar{\delta} = 0.9 \sim 1.0, \\ \bar{T}_i = n - 0.4, \\ d_k = (1.1n - 0.2i - 0.9)/n(n-1), i = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n d_i = 1. \end{cases} \quad (16)$$

此式是在以下假设条件下求出的

1) (A, B, C) 为串联分解实现;

2) 适当选择 R 和 Q , 使得系统在定值扰动时的控制输入 $u(t)$ 的超调量保持在 20% 左右. 于是, SPI 调节器的真实参数可按下列步骤选择:

(1) 根据受控对象阶次 n 的估计, 由 (16) 式求得 $D^T, \bar{\delta}$ 和 \bar{T}_i ;

(2) $\delta = k\bar{\delta}$, 即比例带与 k 成正比;

(3) $T_i = T \cdot \bar{T}_i$, 即积分时间与 T 成正比.

3.2 I 型对象

I 型对象的典型型传递函数为

$$W_p(s) = \frac{1}{T_1 s (Ts + 1)^n} = \frac{k}{Ts (Ts + 1)^n}, \quad (17)$$

其中 $k = T/T_1$. 经坐标变换, 同样可得

$$\begin{aligned} y(S) &= W_p(S)\bar{u}(S) \\ &= \frac{1}{S(S+1)^n} \cdot \frac{1}{\bar{\delta}} \left[(D^T \mathbf{x}(S) - y_0(S)) + \frac{1}{\bar{T}_i S} (y(S) - y_0(S)) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $\bar{\delta} = \delta/k, \bar{T}_i = T_i/T$.

利用 3.1 的步骤, 可得到 I 型对象的 SPI 调节器的归一化参数工程计算公式 ($n=2 \sim 12$)

$$\begin{cases} \bar{\delta} = 0.9, \\ \bar{T}_i = 3.3 + 1.2(n-1), \\ d_i = \begin{cases} \frac{1}{n+3}, & 1 \leq i \leq n, \\ 0.0028(n-12)^2 + 0.305, & i = n+1, \end{cases} \\ \sum_{i=1}^{n+1} d_i = 1. \end{cases} \quad (19)$$

对于其它类型的对象, 如具有明显振荡或微分性质的对象等, 也可参照本节的参数集结法, 导出相应的工程算法, 但形式会复杂一些.

4 SPI 调节器的鲁棒性分析

下面以 P 型对象为例, 分别讨论对象参数和阶次摄动时的系统鲁棒性.

4.1 被控对象参数摄动时的鲁棒性分析

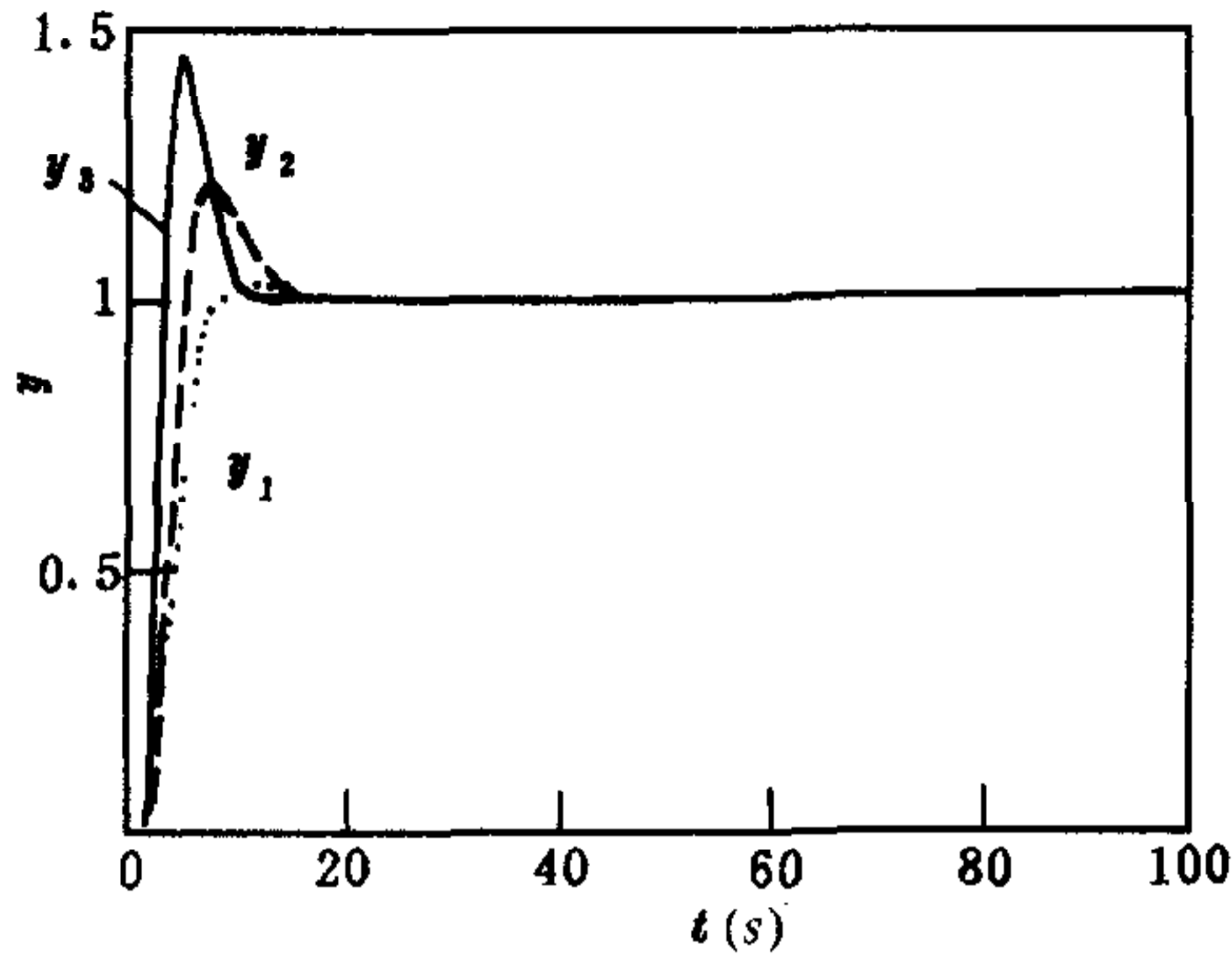
由 P 型对象和 SPI 调节器组成的闭环系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{\left[\left(\sum_{i=1}^n k_{1i} \right) s + k_2 \right] k}{s \{ (Ts + 1)^n - [k_{11} + k_{12}(Ts + 1) + \dots + k_{1n}(Ts + 1)^{n-1}] k \} + k_2 k}. \quad (20)$$

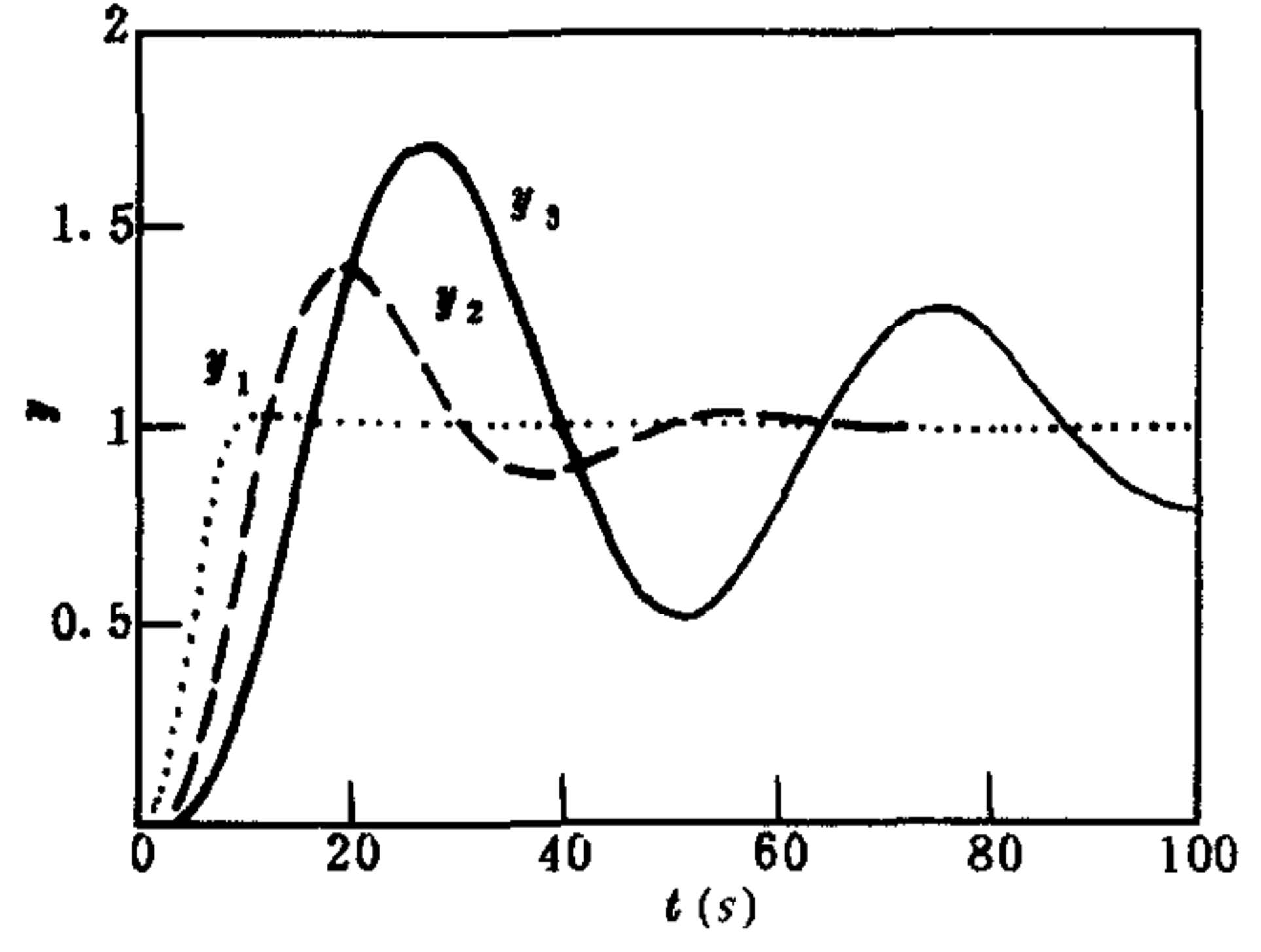
利用 Routh 判据即可得到参数 (k, T) 的鲁棒稳定性的摄动范围. 例如对于 5 阶 P 型对象, 其参数可摄动的范围为

$$0 < \frac{T + \Delta T}{T} \leq 4.3, \quad 0 < \frac{k + \Delta k}{k} < +\infty.$$

它相应于系统具有 $68^\circ (>60^\circ)$ 的相位裕度和无穷大的幅值裕度. 图 3(a) 中的 y_1, y_2, y_3 分别表示在控制参数 K 和对象参数 T 以及阶次 $n=5$ 不变时, $\frac{k}{k} = 1, 2$ 和 10 时的系统响应; 图 3(b) 表示控制参数 K 和对象参数 k 以及阶次 $n=5$ 不变时, $\frac{T}{T} = 1, 2$ 和 3 时的系统响应.



(a)



(b)

图 3 对象参数摄动时的系统响应曲线

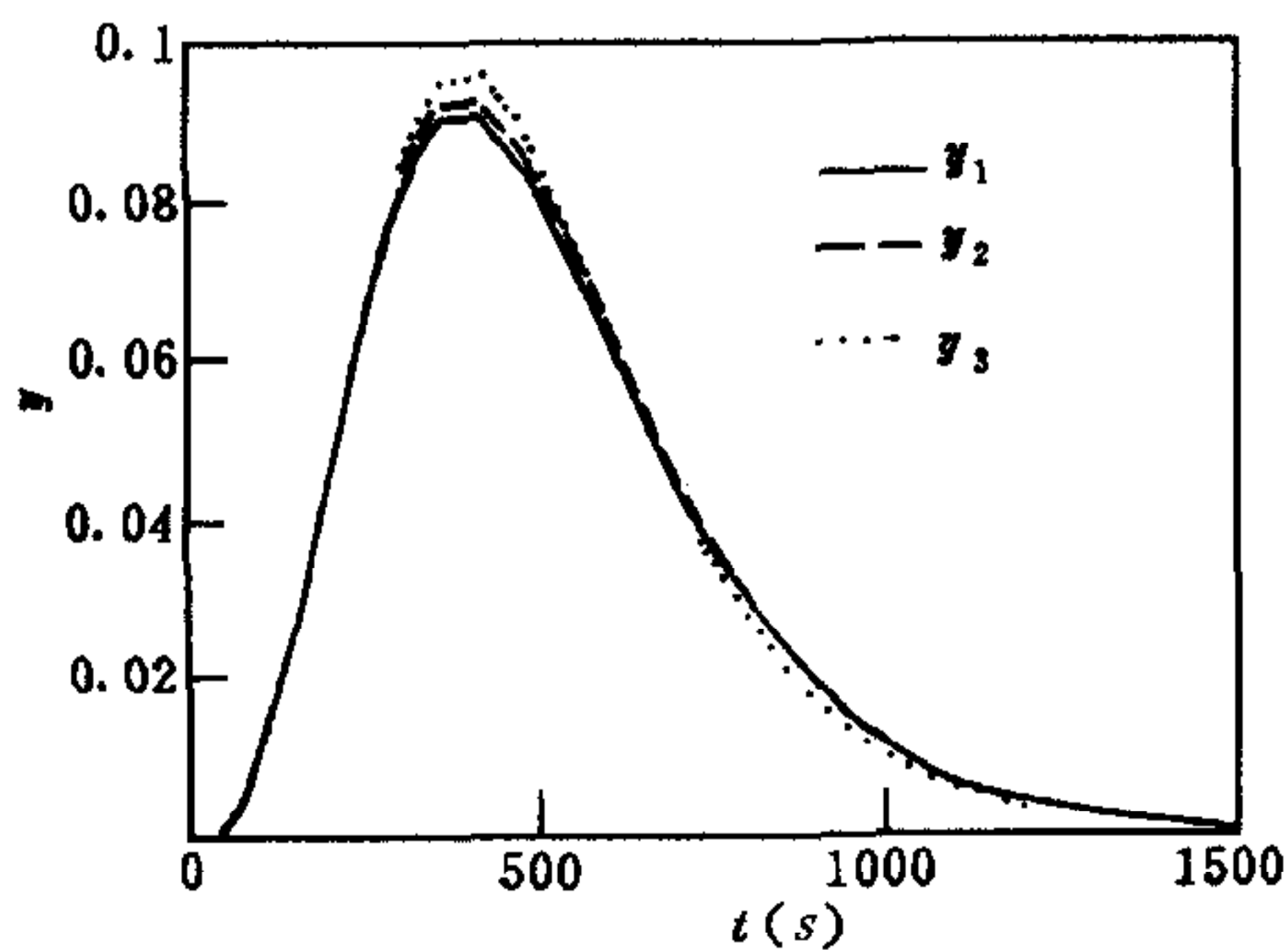
4.2 对象阶次 n 摄动时的鲁棒性分析

实际受控对象大多是非典型的, 例如

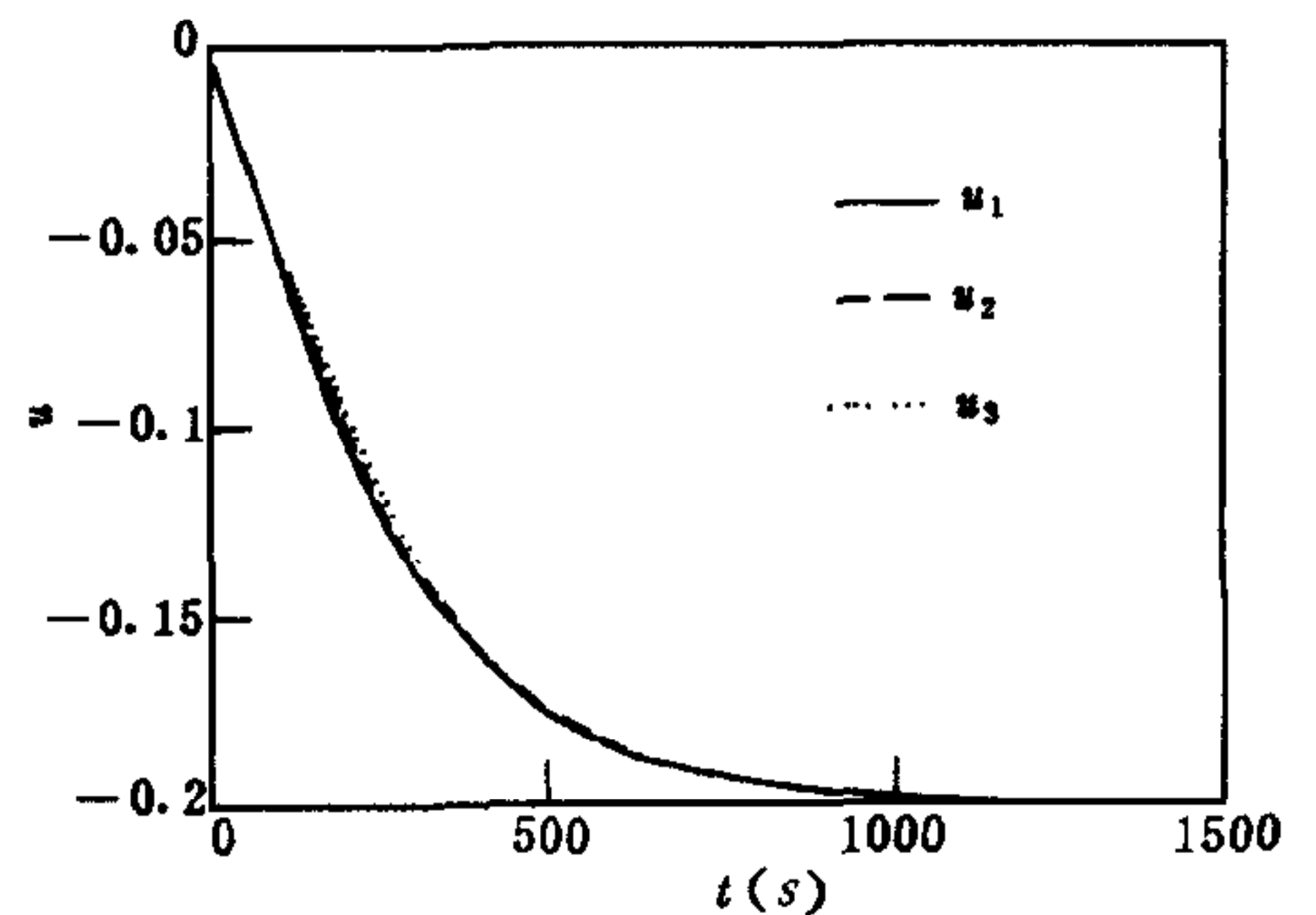
$$W_p(s) = \frac{k}{(1 + 20s)(1 + 40s)(1 + 60s)(1 + 80s)(1 + 100s)}. \quad (21)$$

在 3.1 中的两个假设条件下可求得相应的最优控制参数. 为了进行比较, 现用 $n=3$ 和 4 的 P 型对象拟合(21)式, 可得

$$W'_p(s) = \frac{k}{(1 + 99.4s)^3} \text{ 和 } W''_p(s) = \frac{k}{(1 + 74.5s)^4}.$$



(a)



(b)

图 4 对象阶数摄动时的系统响应曲线

据此可设计相应的 3 阶和 4 阶状态估计器, 并由(16)式求出 $n=3$ 和 4 的两个最优调节器参数. 图 4(a)和(b)是用上述三个不同的 SPI 调节器去控制原来对象(21)的响应曲线.

从图中可以看出,三条响应曲线非常接近,表明 SPI 调节器对阶次 n 的摄动有相当强的鲁棒性.

5 结论

本文提出的 SPI 调节器综合了状态反馈调节器和 PID 调节器的优点,是一种最优调节器,具有强的鲁棒性. 针对各类典型的工业对象,利用本文给出的参数集结方法,可以分别给出相应的计算 SPI 调节器的工程公式,并且同 PID 调节器一样易于参数的调整. 因此, SPI 调节器在工业控制中有推广应用的广阔前景.

参 考 文 献

- [1] Minorsky N. Directional stability of automatically steered bodies. *J. Amer. Soc. Naval Eng.*, 1922, **42**:280—309.
- [2] Kalman R E. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 1960, **5**:102—119.
- [3] 古田胜久,佐野昭. 线性系统理论基础,朱春元等译,北京:国防工业出版社,1984.
- [4] 王永初. 自动调节系统工程设计,北京:机械工业出版社,1983.

ON A NEW KIND OF STATE PI REGULATOR

SONG WENZHONG JIANG GUOPING

(Automation Institute, Southeast University, Nanjing 210096)

Abstract In this paper, a new kind of state PI regulator is presented, its optimal property is proved and its robustness is analyzed. By using parameter aggregation approach, the parameter adjustment of state PI regulator is similar to that of PID regulator.

Key words State PI regulator, parameter aggregation, optimum, robustness.