第 23 卷 第 6 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 23, No. 6
1997 年 11 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Nov., 1997

短 文

# 应用无源性分析研究时变非线性系统的稳定性[1)]

冯纯伯
(东南大学自动化所　南京　210018)

**摘要**　应用反馈系统的无源性分析研究一类时变非线性系统的稳定性，给出寻找连续衰减的充要条件的方法，并证明对于线性系统这种方法给出的结果和 Routh 判据完全一致.

**关键词**　稳定性，无源性，时变非线性系统.

## 1　引言

设有一般性的动态系统

$$F(s,x,t)x=[s^n+f_{n-1}(x,t)s^{n-1}+\cdots+f_0(x,t)]x=0. \tag{1}$$

其中 $s\triangleq\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$；$f_i(x,t)$ 有界、光滑、一定阶次的微分均存在，它可以是 $x$ 的某些导数的函数. 通常用 Lyapunov 函数法研究这类系统的稳定性，但对于一般时变非线性系统，构造合适的 Lyapunov 函数十分不易，而且一般只能得到稳定的充分条件，这种充分条件的保守性也很难估计.

本文将利用反馈系统的无源性分析来研究系统(1)的稳定性. 若 $F(s,x,t)$ 为稳定算子，则可找到某一稳定的算子 $B(s,x,t)$，使得 $F^{-1}(s,x,t)B(s,x,t)$ 为严格无源；反之，若 $F(s,x,t)$ 不是稳定算子，则这样的 $B(s,x,t)$ 不存在. 根据这一原理可以找出分析系统(1)连续衰减应满足的条件.

## 2　预备知识

考察图 1 所示反馈系统，对该系统以下引理成立.

**引理 1.**　图 1 所示系统中 $u\mapsto x$ 严格无源的充要条件是 $H(s,x,t)$ 为严格无源.

**证明.**　根据无源性的定义[3]，有

$$\langle u|x\rangle_T=\langle(v+e)|x\rangle_T=\langle v|x\rangle_T+\langle e|x\rangle_T, \tag{2}$$

已知

1) 得到国家自然科学基金的资助. 本文曾在 1994 年全国控制理论年会上宣读.
收稿日期 1995-05-08

$$\langle e|x\rangle_T=\int_0^T e(t)x(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^2(T)\geq 0,\ \forall\ T\geq 0. \tag{3}$$

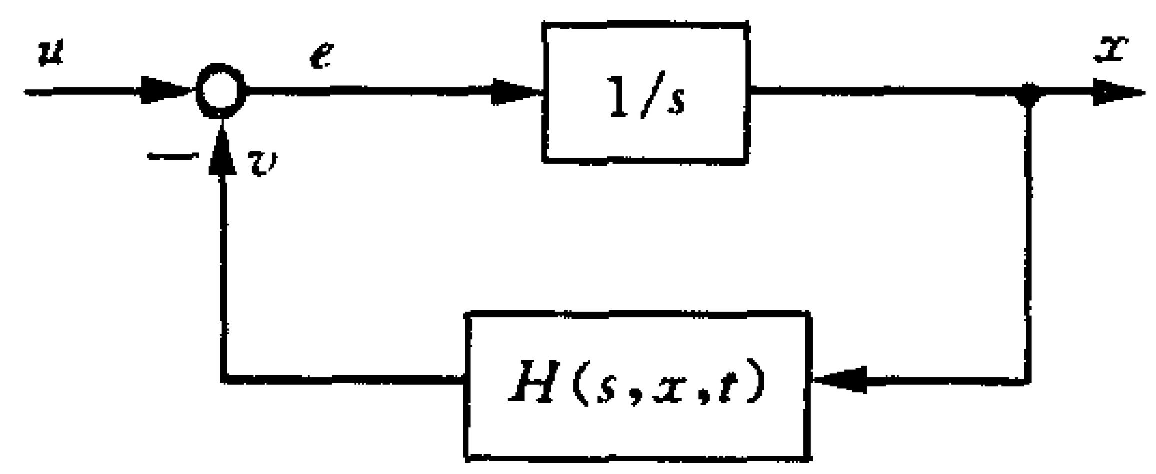


图 1

(3)式表明 $e\mapsto x$ 是输入无源的，但不是严格无源的，按文献[1,2]对无源度的定义，它以输入 $e$ 表示的无源度为零. 当 $H(s,x,t)$ 为严格无源时，有

$$\langle v|x\rangle_T\geq\delta_x|x(T)|^2+\beta,\ \forall\ T\geq 0. \tag{4}$$

其中 $\beta$ 为一常数，$\delta_x>0$. 由(3)，(4)式可得

$$\langle u|x\rangle_T\geq\delta_x|x|^2+\beta',\ \forall\ T\geq 0. \tag{5}$$

(5)式表示 $u\mapsto x$ 的输出无源度 $\delta_x$ 可用系统输出 $x$ 表示出来，令 $\delta_x>0$，$u\mapsto x$ 的增益有界，因此 $u\mapsto x$ 以输入 $u$ 表示的无源度也存在且为正. 由此可见，$u\mapsto x$ 输入严格无源的充要条件是 $H(s,x,tk)$ 严格无源. 文献[2]中曾证明直输回路的正的严格无源度可以补偿反馈回路的无源度，若综合后的无源度为正，则全系统为严格无源的. 此处直输回路仅是无源，并非严格无源，其无源度为零，因此，当且仅当反馈回路的无源度大于零时全系统才是严格无源的. 证毕.

**引理 2.** 若 $H(s,x,t)$ 是严格无源的，$k(x,t)\geqslant\delta>0$，$\forall\ t\geqslant 0$，则 $k(x,t)H(s,x,t)$ 也是严格无源的.

根据无源性的定义，引理 2 显然成立.

**注 1.** $k(x,t)$ 和 $H(s,x,t)$ 是不可交换的，$k(x,t)H(s,x,t)$ 严格无源并不能保证 $H(s,x,t)k(x,t)$ 也严格无源.

## 3 多重反馈系统的一般特性

从最简单的反馈系统开始研究. 对图 2 所示系统用 $H_1(s,x,t)$ 表示 $u\mapsto x$ 的算子，得

$$H_1(s,x,t)u=x, \tag{6}$$

$$H_1(s,x,t)=[s+k_1(x,t)]^{-1}. \tag{7}$$

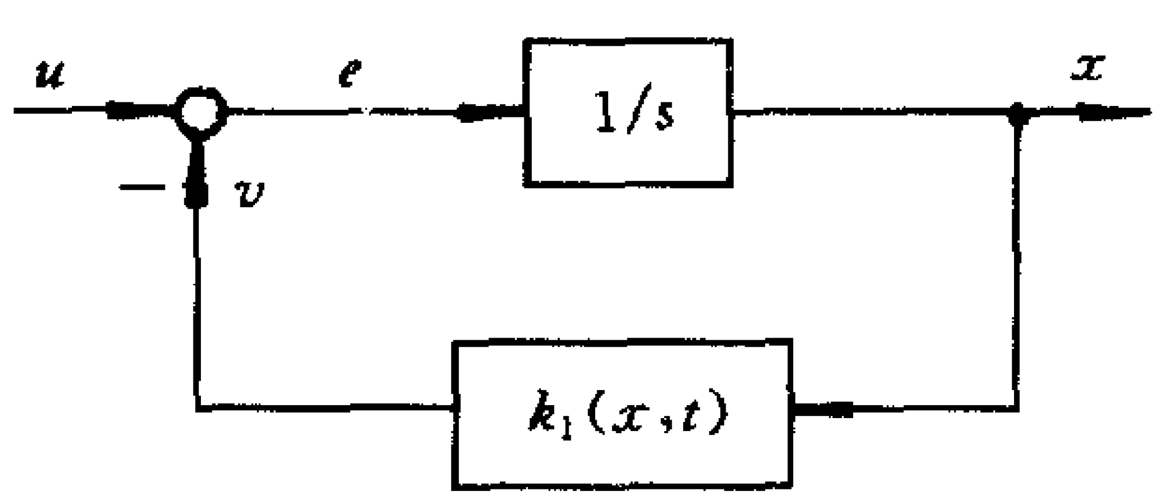


图 2

根据引理 1，当且仅当 $k_1(x,t)\geqslant\delta_1>0$，$H_1(s,x,t)$ 严格无源.

记

$$H_1(s,x,t)=A_1^{-1}(s,x,t)B_1(s,x,t), \tag{8}$$

$$A_1(s,x,t)=s+k_1(x,t), \tag{9}$$

$$B_1(s,x,t)=1. \tag{10}$$

进一步考虑图 3 所示系统，有

$$H_2(s,x,t)u=x, \tag{11}$$

$$H_2(s,x,t)=A_2^{-1}(s,x,t)B_2(s,x,t), \tag{12}$$

$$\begin{aligned}A_2(s,x,t)&=A_1(s,x,t)\varphi_2(x,t)s+B_1(s,x,t)\\&=[s+k_1(x,t)]\varphi_2(x,t)s+1,\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}B_2(s,x,t)&=A_1(s,x,t)\varphi_2(x,t)\\&=[s+k_1(x,t)]\varphi_2(x,t),\end{aligned} \tag{14}$$

$$\varphi_2(x,t) = \frac{1}{k_2(x,t)}. \tag{15}$$

根据引理 1，$H_2(s,x,t)$严格无源的充要条件是 $k_1(x,t)\geqslant\delta_1>0$ 和 $k_2(x,t)\geqslant\delta_2>0$，$\forall\ t\geq 0$. 以上反馈递次连续进行下去，经过 $n$ 重反馈可得

$$H_n(s,x,t) = A_n(s,x,t)^{-1}B_n(s,x,t). \tag{16}$$

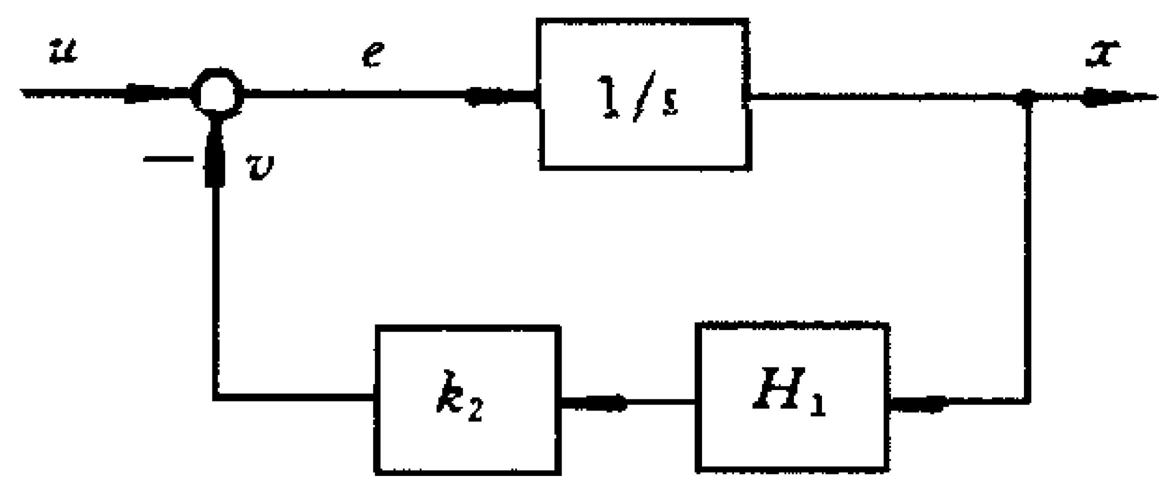


图 3

其中 $A_n(s,x,t)$和 $B_n(s,x,t)$可用递推公式求得，即

$$\begin{aligned} A_i(s,x,t) &= A_{i-1}(s,x,t)\varphi_i(x,t)s + B_{i-1}(s,x,t) \\ &= A_{i-1}(s,x,t)\varphi_i(x,t)s + A_{i-2}(s,x,t)\varphi_{i-1}(x,t), \end{aligned} \tag{17}$$

$$B_i(s,x,t) = A_{i-1}(s,x,t)\varphi_i(x,t), \tag{18}$$

$$\varphi_i(x,t) = k_i^{-1}(x,t). \tag{19}$$

根据引理 1，$H_n(s,x,t)$严格无源的充要条件是 $k_i(x,t)\geqslant\delta_i>0$，$\forall\ i\in[\overline{1,n}],\forall\ t\geq 0$. 通过以上分析可得以下重要结果.

**定理 1.**　若 $A_n(s,x,t)$算子可以通过(17)式递推求得，则系统

$$A_n(s,x,t)x = 0 \tag{20}$$

全局一致连续衰减的充要条件是

$$\varphi_i(x,t) = k_i^{-1}(x,t) \geqslant \delta_i > 0,\ \forall\ i \in [\overline{1,n}],\forall\ t \geq 0. \tag{21}$$

证明.　若 $A_n(s,x,t)$可以通过递推求得，且(21)式满足，则必可得到严格无源的 $H_n(s,x,t)$. 根据引理 1，(21)式是 $H_n(s,x,t)$严格无源的充要条件，因此根据严格无源系统所具有的性质，它也是系统(20)全局连续一致衰减的充要条件.　　证毕.

**注 2.** 根据网络理论，一个严格无源的网络中的动态过程将是连续衰减的，因此在定理 1 中称系统(20)是全局一致连续衰减的. 对于时变系统，若在某一有限时间区间内(21)式中的某些条件暂时不能满足，而系统(20)仍可能是 Lyapunov 意义下稳定的.

## 4　时变非线性系统的稳定性

现在来讨论系统(1)的稳定性. 采用(17)式所规定的递推算法可求得算子 $A_n(s,x,t)$，将它和算子 $F(s,x,t)$等同，可以得到 $f_i(x,t)$和 $\varphi_j(x,t)$之间的关系式，利用已知的$f_i(x,t)$，$\forall\ _i\in[\overline{1,n-1}]$可求得 $\varphi_j(x,t)$，$\forall\ j\in[\overline{1,n}]$，于是也就求得了(1)式全局一致连续衰减的充要条件了. 以下讨论 $n=2,3$ 的具体条件.

(1) $n=2$. 此时

$$A_2(s,x,t) = (s+k_1)\varphi_2 s + 1 = \varphi_2[s^2 + (\varphi_1^{-1} + \varphi_2^{-1}\dot{\varphi}_2)s + \varphi_2^{-1}], \tag{22}$$

其中 $\dot{\varphi}_2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_2(x,t)$. 于是对于系统

$$F_2(s,x,t)x = [s^2 + f_1(x,t)s + f_0(x,t)]x = 0 \tag{23}$$

可得以下结果.

**定理 2.**　系统(23)全局一致连续衰减的条件是

$$f_0(x,t) > 0,\quad \forall\ t \geq 0, \tag{24}$$

$$f_1(x,t)+\dot{f}_0(x,t)/f_0(x,t)>0,\quad \forall\, t\geq 0. \tag{25}$$

证明． 令 $A_2=\varphi_2F_2$,可得

$$k_2=\varphi_2^{-1}=f_0,$$

$$k_1=f_1-\varphi_2^{-1}\dot{\varphi}_2=f_1+\dot{f}_0/f_0.$$

根据定理 1，本定理可得证.

如果 $f_0$ 与 $x$ 无关，则(25)式可给出具体的渐近稳定条件. 如果 $f_0$ 是 $x$ 的函数，则(25)式为一微分不等式，在未知 $x$ 的形式之前无法验证(25)式是否成立. 因此对于一般的时变非线性系统(23)，问题并未得到最后的解答，只是指明了系统全局一致衰减应具有的一种约束. 但对于时变线性系统，(24)，(25)式均可求得. 若(24)，(25)式在某一有限时间区间内不能满足，则此系统并不一定完全发散. 但条件(24)，(25)给出了此系统连续一致衰减的条件. 另外由(25)式可看出，即使 $f_1$ 为负，但 $f_0$ 为正时仍有可能维持系统衰减.

(2) $n=3$. 此时有

$$\begin{aligned}A_3(s,x,t)&=A_2(s,x,t)\varphi_3 s+A_1(s,x,t)\varphi_2\\&=\varphi_2\varphi_3\{s^3+(\varphi_1^{-1}+\dot{\varphi}_2\varphi_2^{-1}+2\dot{\varphi}_3\varphi_3^{-1})s^2\\&\quad+[\dot{\varphi}_3\varphi_3^{-1}(\varphi_1^{-1}+\dot{\varphi}_2\varphi_2^{-1})+\ddot{\varphi}_3\varphi_3^{-1}+\varphi_3^{-1}+\varphi_2^{-1}]s+\varphi_3^{-1}(\varphi_1^{-1}+\dot{\varphi}_2\varphi_2^{-1})\}\end{aligned} \tag{26}$$

令

$$\begin{aligned}A_3(s,x,t)&=\varphi_2\varphi_3F_3(s,x,t)\\&=\varphi_2\varphi_3[s^2+f_2s^2+f_1s+f_0],\end{aligned} \tag{27}$$

于是可得

$$f_2=\varphi_1^{-1}+\dot{\varphi}_2\varphi_2^{-1}+2\dot{\varphi}_3\varphi_3^{-1}, \tag{28}$$

$$f_1=\dot{\varphi}_3\varphi_3^{-1}(\varphi_1^{-1}+\dot{\varphi}_2\varphi_2^{-1})+\ddot{\varphi}_3\varphi_3^{-1}+\varphi_2^{-1}+\varphi_3^{-1}, \tag{29}$$

$$f_0=\varphi_3^{-1}(\varphi_1^{-1}+\dot{\varphi}_2\varphi_2^{-1}). \tag{30}$$

从(28)，(30)式中消去$(\varphi_1^{-1}+\dot{\varphi}_2\varphi_2^{-1})$，可得

$$\dot{\varphi}_3-\frac{1}{2}f_2\varphi_3+\frac{1}{2}f_0\varphi_3^2=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\varphi_3}\right)+\frac{1}{2}f_2\varphi_3^{-1}=\frac{1}{2}f_0. \tag{31}$$

解上式可得

$$\varphi_3^{-1}=k_3=e^{-\frac{1}{2}\int f_2\mathrm{d}t}\Big[\frac{1}{2}\int f_0e^{\int\frac{1}{2}f_2\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\Big]. \tag{32}$$

由于并不需要求得(31)式的通解，只要使(31)式得到满足即可，因此(32)式中的积分常数 $C$ 可取为零.

从(29)，(30)式可得

$$\varphi_2^{-1}=f_1-\dot{\varphi}_3f_0-\ddot{\varphi}_3\varphi_3^{-1}+\varphi_3^{-1}, \tag{33}$$

$$\varphi_1^{-1}=\varphi_3f_0-\dot{\varphi}_2\varphi_2^{-1}. \tag{34}$$

根据以上分析得到以下定理．

**定理 3.** 系统 $F_3(s,x,t)x=0$ 全局一致连续衰减的条件是(32)—(34)式所规定的

$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 始终为正.

和定理 2 一样,对于时变线性系统,可求得最终的结果. 对于一般的非线性系统从(32)—(34)式解不出具体的结果,系统全局一致渐近稳定性的结果还要决定于一个二阶的时变非线性系统的解.

以上结果可以类推到任意的 $n$ 阶一般系统的情况. 对于线性时变系统均可求得一致连续衰减的充要条件. 对于 $n$ 阶的一般时变非线性系统只能得系统全局一致连续衰减应满足的一些约束,这些约束的最终解依赖于对 $n-1$ 阶的时变非线性微分方程的解.

## 5 线性定常系统的稳定性

对于线性定常系统,$k_i(i=1,2,\cdots,n)$均为常数,其导数为零,因此运算大为简化. 此时(16)式化为

$$\frac{A_n(s)}{B_n(s)}=\cfrac{k_n}{\vdots\quad\cfrac{k_3}{\cfrac{k_2}{k_1+s}+s}+s}+s. \tag{35}$$

记
$$A_n(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0, \tag{36}$$
则
$$a_{n-1}=k_1, \tag{37}$$
$$a_{n-2}=\sum_{i=2}^{n}k_i, \tag{38}$$
$$a_{n-3}=k_1\sum_{i=3}^{n}k_i, \tag{39}$$
$$a_{n-4}=k_n\sum_{i=2}^{n-2}k_i+k_{n-1}\sum_{i=2}^{n-3}k_i+\cdots+k_4\sum_{i=2}^{2}k_i, \tag{40}$$
$$a_{n-5}=k_1(k_n\sum_{i=3}^{n-2}k_i+k_{n-1}\sum_{i=3}^{n-3}k_i+\cdots+k_5\sum_{i=3}^{3}k_i), \tag{41}$$
$$\begin{aligned}a_{n-6}=&\,k_n(k_{n-2}\sum_{i=2}^{n-4}k_i+k_{n-3}\sum_{i=2}^{n-5}i_i+\cdots+k_4\sum_{i=2}^{2}k_i\\&+k_{n-1}(k_{n-3}\sum_{i=3}^{n-5}k_i+\cdots)+\cdots,\end{aligned} \tag{42}$$
$$\vdots$$
$$a_0=\begin{cases}k_2k_4\cdots k_n & (\text{当 } n \text{ 为偶数}),\\ k_1k_3\cdots k_n & (\text{当 } n \text{ 为奇数}).\end{cases}$$

根据定理 1 得知,$A_n(s)x=0$ 渐近稳定的条件是 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$均为正. 确实,不难用 Routh 判别法来检验这一结论,为此列出 Routh 表.

$$
\begin{array}{l|llll}
s^n & a_n=1 & a_{n-2}=\sum_2^n k_i & a_{n-4} & a_{n-6}\cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1}=k_1 & a_{n-3}=k_1\sum_3^n k_i & a_{n-5} & a_{n-7}\cdots \\
s^{n-2} & A_1=\dfrac{a_{n-1}a_{n-2}-a_na_{n-3}}{a_n} & A_2=\dfrac{a_{n-1}a_{n-4}-a_na_{n-5}}{a_n} & A_3=\dfrac{a_{n-1}a_{n-6}-a_na_{n-7}}{a_n} & \cdots \\
 & =k_2 & =k_2\sum_4^n k_i & & \\
s^{n-3} & B_1=\dfrac{A_1a_{n-3}-a_{n-1}A_2}{A_1} & B_2=\dfrac{A_1a_{n-5}-a_{n-1}A_3}{A_1} & B_3=\dfrac{A_1a_{n-7}-a_{n-1}A_4}{A_1} & \cdots \\
 & =k_1k_3 & =k_1k_3\sum_5^n k_i & & \cdots \\
s^{n-4} & C_1=\dfrac{B_1A_2-A_1B_2}{B_1} & C_2=\dfrac{B_1A_3-A_1B_3}{B_1} & C_3=\dfrac{B_1A_4-A_1B_4}{B_1} & \cdots \\
 & =k_2k_4 & =k_2k_4\sum_6^n k_i & & \\
s^{n-5} & D_1=\dfrac{C_1B_2-B_1C_2}{C_1} & D_2=\dfrac{C_1B_3-B_1C_3}{C_1} & & \vdots \\
 & =k_1k_3k_5 & =k_1k_3k_5\sum_7^n k_i & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^0 & \begin{cases} k_1k_3\cdots k_n, & (n=\text{奇数}), \\ k_2k_4\cdots k_n, & (n=\text{偶数}). \end{cases} & & &
\end{array}
$$

从上式可以看出，Bouth 表中的第一列就是 $A_n(s)$ 中的常数项，于是对于一个任意的多项式，按 Bouth 表判别法就可求得所有的 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$，若这些 $k_i$ 均为正，则系统稳定，这和 Bouth 判据完全一致. 按 Bouth 算法的规则求得 $k_i$ 之后，也就可以定出 $B_n(s)$，也就可以求得严格无源的 $H_n(s)$，因此这也提供了一种设计严格无源的传递函数的方法.

## 6 结 论

以无源性分析为依据，本文提出了一种分析一般动态系统的稳定性的方法，得到全局一致渐近稳定应满足的充要约束. 对于时变非线性系统，为得到一般性的最后结果，一般要解低一阶的非线性微分方程才能得到，对此尚要作进一步的研究. 但对时变线性系统则可得到一致连续衰减的具体的充要条件. 对于线性定常系统，所得结果和 Routh 判据完全一致. 另一方面，本文给出了一种设计严格无源的一般性的时变非线性系统的方法. 对于给定的算子 $F(s,x,t)$，用本文的方法寻找其对应的 $\varphi_i(x,t)$，若这些 $\varphi_i(x,t)$ 均为正，则系统(1)自然是稳定的，同时也就找到了算子 $B_n(s,x,t)$，使得 $A_n^{-1}(s,x,t)$

$B_n(s,x,t)$为严格无源．对于线性系统这种分析和设计可得到最后的解析解答．

## 参 考 文 献


[1] 冯纯伯．复合系统的输入输出特性分析．中国科学，A 辑，1985，(9)：864－868.

[2] 冯纯伯．反馈系统的无源性分析及其应用．自动化学报，1985，**11**(2)：111－117.

[3] Desoer C A, Vidyasagar M. Feedback systems: input-output properties, New York: Academic Press, 1975.

[4] Popov V M. Hyperstability of control systems. New York: Springer-Verlag, 1973.

[5] Chen T C. Linear system theory and design. Holt, Rinehart and Winston, 1984.


# STABILITY ANALYSIS FOR TIME-VARYING NONLINEAR SYSTEMS VIA PASSIVITY ANALYSIS


FENG CHUNBO

(*Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing* 210018)



**Abstract** An approach to stability analysis for time-varying nonlinear systems via passivity analysis is presented in this paper. The necessary and sufficient conditions for continuous dissipation can be obtained. As for linear time-invariant systems the obtained result coincides with the Routh criterion.



**Key words** Stability, passivity, time-varying nonlinear systems.


(上接第 785 页)