

# 广义可镇定连续时延系统的通用 连续线性控制器设计

M de la Sen 罗宁苏

(巴斯克大学电子电力系 西班牙)

**摘 要** 讨论确保闭环线性时延系统在 Lyapunov 意义下全局一致稳定的通用线性控制器的设计问题. 文中给出的通用镇定控制器适用于有限、无限和时变的点型、分布型及混合型等各类时延系统.

**关键词** 时延系统, 点型时延, 分布型时延, 稳定性, 镇定控制器.

## 1 引言

微分差分方程广泛应用于时延微分系统(含滞后效应的系统<sup>[1]</sup>)的建模. 通过对常微分方程的标准 Picard-Lindelöf 和 Cauchy-Peano 定理<sup>[2,3]</sup>的推广, 可解决该类系统唯一解的存在性问题<sup>[1]</sup>. 文献[4]分析了开环微分系统的 Lyapunov 稳定性和周期解的轨道稳定性. 文献[3-5]指出时延系统的可控可观性概念间的相关等价性与无时延系统相比, 并非十分直接. 对于同量时延系统的设计问题, 文献[5]证明: 若系统谱可控, 则存在一个含时延的反馈矩阵使得单输入闭环系统亦可控. 近年来, 许多学者研究了时延系统的镇定性和稳定性问题<sup>[1,6-13]</sup>. 通常采用以下两类稳定性测试方法: 基于单/多变量时延系统的特征多项式的根配置<sup>[5]</sup>, 或将时延系统视为环上的 1-D 模型. 对于同量或非同量时延系统, 文献[6]采用  $n$ -D( $n \geq 2$ ) 模型进行稳定性测试. 本文将研究点型、分布型、混合型等各类含状态和输入时延系统的镇定性问题. 提出了一类新颖的含上述同类型时延的通用控制器. 在以下章节中, 用 SP, SD, SED 和 SVD 简记点型、分布型、指数分布型和无限 Volterra 分布型的时延系统.

## 2 时延系统

### 2.1 点型时延系统

(SP):  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_0(t)x(t-h) + B(t)u(t) + B_0(t)u(t-h')$ ,  $t \geq 0$ , (1)  
其中  $x(t) \in R^n$  为轨迹值;  $u(t) \in R^m$  ( $m \leq n$ ) 为控制矢量;  $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ ;  $u_t(\theta') = u(t+\theta')$ ;  $\theta \in [-h, 0)$ ,  $\theta' \in [-h', 0)$ ; 正参数  $h, h'$  分别表示系统的内、外时延;  $A(\cdot), A_0(\cdot)$  为  $(n \times n)$  矩阵函数;  $B(\cdot), B_0(\cdot)$  为含实元的  $(n \times m)$  矩阵函数; 初始轨迹  $x(\theta) = x_0(\theta)$ ;  $\theta \in [-h, 0)$  为连续或绝对连续有界函数.

## 2.2 分布型时延系统

$$(SD): \dot{x}(t) = A(t)x(t) + \tilde{A}x_t + B(t)u(t) + \tilde{B}u_t, t \geq 0, \quad (2)$$

其中  $x(\cdot), u(\cdot), A(\cdot), B(\cdot), x_0(\cdot)$  的定义同 SP 系统; 算子  $\tilde{A}$  和  $\tilde{B}$  定义为  $\tilde{A}\varphi = \int_{-\sigma}^0 [d\alpha(\theta)]\varphi(\theta), \tilde{B}\mu = \int_{-\sigma'}^0 [d\beta(\theta)]\mu(\theta), \alpha(\cdot), \beta(\cdot)$  为  $BV([- \sigma, 0]; \mathbf{R}^{n \times n}), BV([- \sigma', 0]; \mathbf{R}^{n \times m})$  上的矩阵(或标量)有限测度,  $BV$  为一类有界变分且局部可积的矩阵测度.

## 3 初始结果

将  $SD(s), SED(s)$  系统简化为  $SP(s)$  系统, 可得时不变  $SD(s), SED(s)$  系统的等价描述.

### 引理 1.

(i) 对于 SED 系统有

$$(SED): \dot{x}(t) = Ax(t) + \int_0^h A_0 e^{A'\theta} x(t-\theta) d\theta + Bu(t) + \int_0^{h'} B_0 e^{B'\theta} u(t-\theta') d\theta, \quad (3)$$

其中  $u(t) = 0; t < 0, x_0(t) = \varphi(t); \varphi \in AC([-h, 0]; \mathbf{R}^n); t \in [-h, 0]$ . 采用广义 SP 系统可将(3)式等价描述为

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{A}_0\bar{x}(t-h) + \bar{B}u(t), \quad (4)$$

其中  $\bar{x}(t) = [x^T(t) : x_1^T(t) : u_1^T(t)]^T; \bar{x}_0(t) = [\varphi^T(t) : O^T : O^T]^T; t \in [-h, 0], x_1(\cdot) \in \mathbf{R}^n, u_1(\cdot) \in \mathbf{R}^m; \bar{B} = [B^T : O^T : I_m]^T;$

$$\bar{A} = : \begin{bmatrix} A & A_0 & B_0 \\ I_n & A'_0 & O \\ O & O & B'_0 \end{bmatrix}; \quad \bar{A}_0 = : \begin{bmatrix} O & -A_0 e^{A'h} & -B_0 e^{B'h} \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix}. \quad (5)$$

对于自由运动系统, 可用扩展状态矢量  $\bar{x} = [x^T : x_1^T]^T \in \mathbf{R}^{2n}$  进行描述, 其中在区间  $[-h, 0]$  上  $x_0(t) = [\varphi^T(t) : O^T]^T;$

$$\bar{A} = : \begin{bmatrix} A & A_0 \\ I_n & A'_0 \end{bmatrix}; \quad \bar{A}_0 = : \begin{bmatrix} O & -A_0 e^{A'h} \\ O & O \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = : \begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix}. \quad (6)$$

(ii) 若把方程(3)右侧的两积分项变为  $\int_{-\sigma}^0 A_0 e^{A'\theta} x(t+\theta) d\theta$  及  $\int_{-\sigma'}^0 B_0 e^{B'\theta} u(t+\theta) d\theta$ , 则当  $\sigma=h, \sigma'=h'$  时命题(i)仍成立.

一般的有限时延系统可含点型和分布型内、外时延

$$(SPD): \dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_0(t)x(t-h) + \tilde{A}x_t + B(t)u(t) + B_0(t)u(t-h') + \tilde{B}u_t, t \geq 0, \quad (7)$$

若  $\tilde{A} \rightarrow \tilde{A}_t, \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}_t$ , 则时延与时间相关.

## 4 变时延 SPVD 系统

变时延 SPVD 系统是一类含时变点型和 Volterra 卷积型时延的时变系统

$$(SPVD): \dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_0(t)x(t-h(t)) + \int_0^t B(t-\tau)x(\tau) d\tau + M(t)u(t)$$



$$+ E(t)\mathbf{u}(t - h'(t)) + \int_0^t E'(t - \tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau; \mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t). \quad (8)$$

其中  $\mathbf{u}(t) = 0, t < 0$ ;  $\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot)$  分别为  $n, m, p$  维矢量. 作者在本文中提出了下列动态控制器:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_f(t) = & A_f \mathbf{z}_f(t) + A_{0f}(t)\mathbf{z}_f(t - h_f(t)) + \int_0^t B_f(t - \tau)\mathbf{z}_f(\tau)d\tau \\ & + M_f(t)\mathbf{y}(t) + E_f(t)\mathbf{y}(t - h'_f(t)) + \int_0^t E'_f(t - \tau)\mathbf{y}(\tau)d\tau, \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_p(t) = & A_p \mathbf{z}_p(t) + A_{0p}(t)\mathbf{z}_p(t - h_p(t)) + \int_0^t B_p(t - \tau)\mathbf{z}_p(\tau)d\tau \\ & + M_p(t)\mathbf{u}_r(t) + E_p(t)\mathbf{u}_r(t - h'_p(t)) + \int_0^t E'_p(t - \tau)\mathbf{u}_r(\tau)d\tau, \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_c(t) = & A_c \mathbf{z}_c(t) + A_{0c}(t)\mathbf{z}_c(t - h_c(t)) + \int_0^t B_c(t - \tau)\mathbf{z}_c(\tau)d\tau + M_c(t)[\mathbf{u}_p(t) - \mathbf{u}_f(t)] \\ & + E_c(t)[\mathbf{u}_p(t - h'_c(t)) - \mathbf{u}_f(t - h'_c(t))] + \int_0^t E'_c(t - \tau)[\mathbf{u}_p(\tau) - \mathbf{u}_f(\tau)]d\tau, \end{aligned} \quad (9c)$$

$$\mathbf{u}_p(t) = C_p(t)\mathbf{z}_p(t) + D_p(t)\mathbf{u}_r(t), \quad \mathbf{u}_f(t) = C_f(t)\mathbf{z}_f(t) + D_f(t)\mathbf{y}(t), \quad (9d)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_c(t) = C_c(t)\mathbf{z}_c(t) + D_c(t)[\mathbf{u}_p(t) - \mathbf{u}_f(t)]. \quad (9e)$$

其中  $h_f(\cdot), h'_f(\cdot), h_p(\cdot), h'_p(\cdot), h_c(\cdot), h'_c(\cdot)$  代表时延;  $\mathbf{z}_f(\cdot), \mathbf{z}_p(\cdot), \mathbf{z}_c(\cdot)$  代表反馈控制器、预补偿器和前馈控制器的状态矢量, 其维数分别为  $l_f, l_p, l_c, l_f, l_p, l_c$ , 相应的初值区间分别为  $[-h_f(0), 0], [-h_p(0), 0], [-h_c(0), 0]$ ;  $\mathbf{u}_f(\cdot), \mathbf{u}_p(\cdot), \mathbf{u}_c(\cdot)$  分别为  $m_f = m_p, m_c = m$  维的动态补偿器(9)的输出;  $\mathbf{u}_r$  为  $m_q$  维的参考信号. 动态控制律(9)可写为以下紧凑的形式

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) = & [I + D_c(t)D_f(t)D(t)]^{-1} \{ C_c(t)\mathbf{z}_c(t) + D_c(t)[C_p(t)\mathbf{z}_p(t) \\ & - C_f(t)\mathbf{z}_f(t) - D_f(t)C(t)\mathbf{x}(t) + D_p(t)\mathbf{u}_r(t) \}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) = & F(t)\mathbf{z}(t) + F_1(t)\mathbf{z}(t - h_p(t)) + F_2\mathbf{z}(t - h_c(t)) + F_3(t)\mathbf{z}(t - h_f(t)) \\ & + F_4(t)\mathbf{z}(t - h'_c(t)) + F_5(t)\mathbf{y}(t - h'_f(t)) + \int_0^t F_6(t - \tau)\mathbf{z}(\tau)d\tau \\ & + F_7(t)\mathbf{u}_r(t - h_p(t)) + F_8(t)\mathbf{u}_r(t - h'_c(t)) + F_9(t)\mathbf{y}(t - h'_c(t)) \\ & + \int_0^t F_{10}(t - \tau)\mathbf{u}_r(\tau)d\tau + F_{11}(t)\mathbf{y}(t) + F_{12}(t)\mathbf{u}_r(t) + \int_0^t F_{13}(t - \tau)\mathbf{y}(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $\mathbf{z}(t) = [\mathbf{z}_p^T : \mathbf{z}_c^T : \mathbf{z}_f^T]^T$ , 且假设以上方程右侧中的逆矩阵存在

$$F(t) = \begin{bmatrix} A_p(t) & O & O \\ M_c(t)C_p(t) & A_c(t) & -M_c(t)C_f(t) \\ O & O & A_f(t) \end{bmatrix}, \quad F_4(t) = \begin{bmatrix} O & O & O \\ E_c(t)C_p(t) & O & -E_c(t)C_f(t) \\ O & O & O \end{bmatrix}; \quad (12a)$$

$$F_6(t - \tau) = \begin{bmatrix} B_p(t - \tau) & O & O \\ E'_c(t - \tau)C_p(\tau) & B_c(t - \tau) & -E'_c(t - \tau)C_f(t) \\ O & O & B_f(t - \tau) \end{bmatrix}; \quad (12b)$$

$$F_1(t) = \text{Diag}[A_{0p}(t) : O : O], F_2(t) = \text{Diag}[O : A_{0c}(t) : O], F_3(t) = \text{Diag}[O : O : A_{0f}(t)]; \quad (12c)$$

$$F_5(t) = \text{Diag}[O^T : O^T : E_f^T(t)], F_7(t) = [E^T(t) : O^T : O^T]^T, F_8(t) = [O^T : D_p^T(t)E_c^T(t) : O^T]^T; \quad (12d)$$

$$F_9(t) = [O^T : -D_f^T(t)E_c^T(t) : O^T]^T, F_{10}(t) = [E'_p(t-\tau) : D_p^T(\tau)E_c^T(t-\tau) : O^T]^T; \quad (12e)$$

$$F_{11}(t) = [O^T : -D_f^T(t)M_c^T(t) : M_f^T(t)]^T, F_{12}(t) = [M_p^T(t) : D_p^T(t)M_p^T(t) : O^T]^T; \quad (12f)$$

$$F_{13}(t-\tau) = [O^T : D_f^T(\tau)E_c^T(t-\tau) : E'_f(t-\tau)]^T. \quad (12g)$$

在考虑有限区间积分的情形下,可对有限分布型时延采用类似于方程(8)的方式进行处理.完整的闭环系统如图1所示.

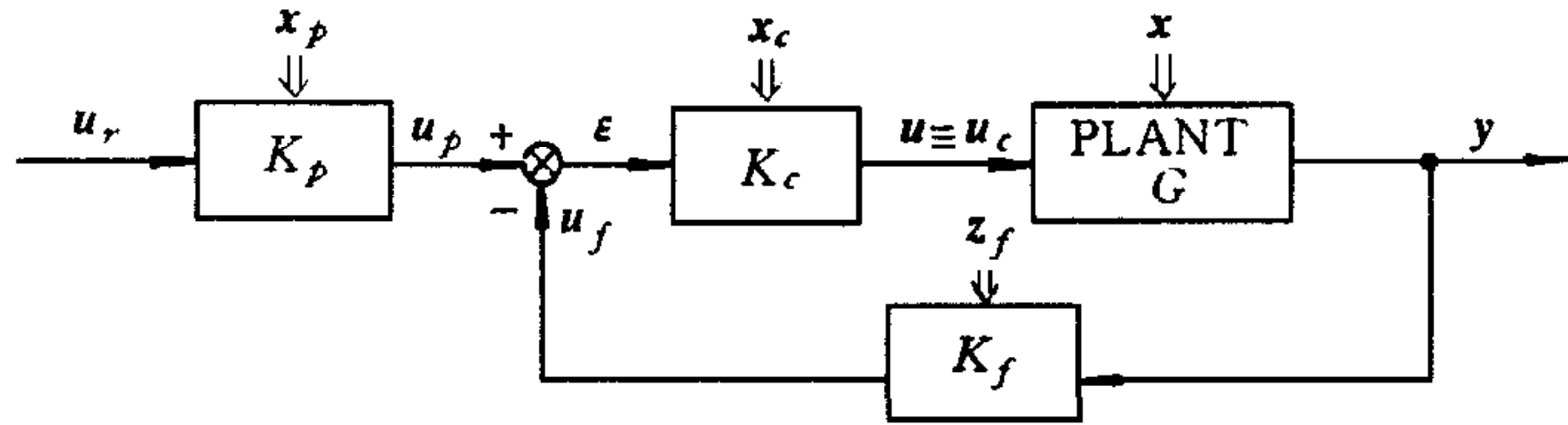


图1 闭环控制系统

## 5 扩展 SPVD 系统的调节稳定性——主要结果

假设矩阵函数  $H(t), K(t)$  在  $[0, \infty]$  上连续可微,并记  $\tilde{x} = : [x^T : z^T]^T$ ,  $\tilde{u} = : [u^T : z^T]^T$ ,  $\tilde{y} = : [y^T : z^T]^T$  分别为扩散系统的状态、控制和输出,可用以下扩展系统对 SPVD 系统和相应的控制器方程(8)–(12)进行描述.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) = & \tilde{A}(t)\tilde{x}(t) + \tilde{A}_0(t)\tilde{x}(t-h(t)) + \int_0^t \tilde{B}(t-\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau + \tilde{M}(t)\tilde{u}(t) \\ & + \tilde{E}(t)\tilde{u}(t-h'(t)) + \int_0^t \tilde{E}'(t-\tau)\tilde{u}(\tau)d\tau, \quad \tilde{y}(t) = \tilde{C}(t)\tilde{x}(t); \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) = & \tilde{K}(t)\tilde{x}(t) + \tilde{F}_1(t)\tilde{x}(t-h_p(t)) + \tilde{F}_2(t)\tilde{x}(t-h_c(t)) + \tilde{F}_3(t)\tilde{x}(t-h_f(t)) \\ & + \tilde{F}_4(t)\tilde{x}(t-h'_c(t)) + \tilde{F}_5(t)\tilde{x}(t-h'_f(t)) + \int_0^t \tilde{F}_6(t-\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau + \tilde{K}'(t)u_r(t) \\ & + \tilde{K}_c(t)u_r(t-h'_c(t)) + \tilde{K}_p(t)u_r(t-h'_p(t)) + \int_0^t \tilde{K}_d(t-\tau)u_r(\tau)d\tau; \end{aligned} \quad (13b)$$

$$\tilde{K}(t) = \tilde{K}_0(t)\tilde{C} = \begin{bmatrix} K(t)C(t) & H(t) \\ F_{11}(t)C(t) & F(t) \end{bmatrix}, \tilde{F}_4(t) = \begin{bmatrix} O & O \\ F_9(t)C(t) & F_4(t) \end{bmatrix}; \quad (14a)$$

$$\tilde{F}_5(t) = \begin{bmatrix} O & O \\ F_5(t)C(t) & O \end{bmatrix}, \tilde{F}_6(t-\tau) = \begin{bmatrix} O & O \\ F_{13}(t-\tau)C(\tau) & F_6(t-\tau) \end{bmatrix}; \quad (14b)$$

$$X(t) = \text{Diag}[X(t) : O], X(t) \Leftrightarrow A(t), A_0(t), B(t), E(t) \text{ or } E'(t), \tilde{M}(t) = \text{Diag}[M(t) : I]; \quad (14c)$$

$$\tilde{F}_i(t) = \text{Diag}[O : F_i(t)], 1 \leq i \leq 3, \tilde{K}'(t) = [K'^T(t) : F_{12}^T(t)]^T; \quad (14d)$$

$$\tilde{K}_c(t) = [O^T : F_8^T(t)]^T, \tilde{K}_p(t) = [O^T : F_7^T(t)]^T, \tilde{K}_d(t) = [O^T : F_{10}^T(t)]^T. \quad (14e)$$

**定理 1.** 若扩展闭环 SPVD 系统(13), (14)满足以下假设:

1)  $\int_0^\infty |\tilde{G}(\tau)|d\tau < 1$  且  $\tilde{G}(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ . 其中  $\tilde{G}(t) = \tilde{G}(0) + (I + \tilde{D}_1^{-1}\tilde{D}) \int_0^t \tilde{C}_7(\tau)d\tau$ ;  $\tilde{C}_7(t-\tau) = \tilde{B}(t-\tau) + \tilde{E}'(t-\tau)\tilde{K}(\tau) + \tilde{F}_6(t-\tau)$  为一矩阵函数,其矩阵元满足  $L^1([0, \infty); \mathbf{R})$ , 即  $\tilde{G}(t) = (I + \tilde{D}_1^{-1}\tilde{D})\tilde{C}_7$  成立,  $\tilde{D}, \tilde{D}_1$  为常值对称正定矩阵;

2) 通过选择扩展系统和控制器增益,使  $\tilde{A}(t) + \tilde{M}(t)\tilde{K}(t)$  和  $\sum_{i=0}^6 \tilde{C}_i^T(t) + \tilde{C}_i(t)$  为常



值矩阵;

3)  $\tilde{G}(0) = \tilde{D}_1^{-1}(\tilde{A}(t) + \tilde{M}(t)\tilde{K}(t))$  及  $I + D_c(t)D_f(t)D(t)$  为非奇异矩阵;

4) 系统和控制器中的时延为时间导数已知的时间函数, 则可知自由闭环系统(即在  $[0, \infty)$  上  $u_r \equiv 0$ ) 的零解为全局渐近稳定, 当且仅当下述 Lyapunov 方程对一充分大的  $q \in \mathbf{R}^+$  和满足假设(1)–(3)的常值矩阵

$$[\tilde{A}^T + \tilde{K}^T \tilde{M}^T] \tilde{D} + \tilde{D}[\tilde{A} + \tilde{M}\tilde{K}] = -qI + \sum_{i=0}^6 \tilde{C}_i^T \tilde{C}_i + \{\tilde{D}_1^{-1}[\tilde{A}^T + \tilde{K}^T \tilde{M}^T] \tilde{D}_1 - \tilde{A}^T - \tilde{K}^T \tilde{M}^T\} \tilde{D}_1 + \tilde{D}_1 \{\tilde{D}_1[\tilde{A} + \tilde{M}\tilde{K}] \tilde{D}_1^{-1} - \tilde{A} - \tilde{M}\tilde{K}\} \quad (15)$$

存在解矩阵  $\tilde{D} = \tilde{D}^T > 0$ , 其中  $\tilde{C}_i(t) = : \tilde{F}_i(t) (i=1, 2, \dots, 5), \tilde{C}_0(t) = : \tilde{A}_0(t), \tilde{C}_6(t) = \tilde{E}(t)\tilde{K}(t-h'(t))$ ; 若假设(1)减弱为  $\int_0^\infty |\tilde{b}(\tau)| d\tau < \infty$ , 则系统保持简单的 Lyapunov 稳定性.

## 6 控制器设计和数字仿真例子

控制器设计将基于对方程(14)中的矩阵  $\tilde{K}(t)$  的综合而进行. 预选定对称正定矩阵  $\tilde{D}, \tilde{D}_1$  及标量  $q \in \mathbf{R}^+$ , 并保持定理 1 中的其余条件. 首先采用 Kronecker 积对  $(m+l) \times (n+l)$  维扩展矩阵  $\tilde{K}(t)$  进行计算, 并使预先选定的输出矩阵  $C$  与方程(14a)右侧的未知项分离. 具体步骤如下:

**步骤 1.** 计算  $\tilde{K}(t)$

预先选定充分大的标量  $q \in \mathbf{R}^+$  和矩阵  $\tilde{D}, \tilde{D}_1$ , 采用左 Kronecker 积方法将方程(14)中的未知矩阵  $\tilde{K}(t)$  改写为矢量形式. 首先注意到存在酉阵  $U$  使得  $\tilde{k}^T = U\tilde{k}, \tilde{k} = [\tilde{k}_1^T : \tilde{k}_2^T : \dots : \tilde{k}_{n+l}^T]^T$  及

$$\tilde{\Delta}\tilde{k} = : \{[(\tilde{D} + \tilde{D}_1)\tilde{M} \otimes I - \tilde{D}_1^2 \tilde{M} \otimes \tilde{D}_1^{-1} - 1]U + I \otimes (\tilde{D} + \tilde{D}_1)\tilde{M} - \tilde{D}_1^{-1} \otimes \tilde{D}_1^2 \tilde{M}\} \tilde{k} = \nu. \quad (16)$$

其中矢量  $\nu = [v_1^T : v_1^T : \dots : v_{n+l}^T]^T$  由矩阵  $V$  的行构成;

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_{n+l}]^T = -qI + \tilde{\Delta}' - \tilde{A}^T(\tilde{D} + \tilde{D}_1^{-1}) - (\tilde{D} + \tilde{D}_1^{-1})\tilde{A} + \tilde{D}_1^{-1}\tilde{A}^T\tilde{D}_1^2 + \tilde{D}_1^2\tilde{A}\tilde{D}_1^{-1}, \quad (17a)$$

$$\tilde{\Delta}' = : \sum_{i=0}^6 \tilde{C}_i \tilde{C}_i^T. \quad (17b)$$

方程(16)中的系数矩阵  $\tilde{\Delta}$  的维数为  $(n+l)^2 \times (m+l)(n+l)$ , 且  $m \leq n \Rightarrow \text{rank}(\tilde{\Delta}) \leq (m+l) \times (n+l)$ .

**策略 1**(时不变控制器).

预先选定  $\tilde{\Delta}'$  中的控制器参数, 并在方程(16)中作相应的分量消除, 将未知向量  $\tilde{k}$  转换成  $\tilde{k}'$ , 则  $\dim(\tilde{k}') = \dim(\tilde{k}) = (m+l)(n+l) - m(p+l) = n(l+m) + l^2 - mp$ . 存在酉阵  $\tilde{U}$  使得  $\tilde{k} = \tilde{U}\tilde{k}' = \tilde{U}[\tilde{k}_1^T : \tilde{k}_2^T]^T$ , 其中  $\tilde{k}_1$  已知并可通过 Kronecker 积从  $\tilde{\Delta}'$  中算得, 将方程(16)改写为

$$(\tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}'')\tilde{k} = (\tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}')\tilde{U}[\tilde{k}_1^T : \tilde{k}_2^T]^T = (\tilde{\Delta}_1\tilde{k}_1 + \tilde{\Delta}_2)\tilde{k}_2, \quad \tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}'' = [\tilde{\Delta}_1 : \tilde{\Delta}_2], \quad (18)$$

使得  $\tilde{\Delta}''\tilde{k}$  为矩阵  $\tilde{\Delta}'$  按行排列后的分量. 由(18)式可得

$$\tilde{\Delta}_2\tilde{k}' = \nu - \tilde{\Delta}_1\tilde{k}_1, \quad (19)$$

其中  $\text{rank}(\tilde{\Delta}_2) \leq n(l+m) + l^2 - mp$ . 若  $m > n$  则至少存在一个解  $\tilde{k}'$ , 当且仅当  $\text{rank}(\tilde{\Delta}_2) =$

$\text{rank}[\tilde{\Delta}_2 : \nu - \tilde{\Delta}_1 \tilde{k}_1]$  (Frobenius 定理) 成立; 若  $m \leq n$ , 通过设计  $(n+l) \times (n+l)$  矩阵  $\tilde{D}_1$  并选择矢量  $\nu$ , 使得  $\nu - \tilde{\Delta}_1 \tilde{k}_1 = \sum_{i=1}^{l+n} \lambda_i \tilde{\Delta}_{2i}$ , 则上述秩条件始终成立, 其中  $\tilde{\Delta}_{2(\cdot)}$  表示  $l \times (l+n)$  矩阵  $\tilde{\Delta}_2$  的行,  $\lambda(\cdot)$  为一组非零标量. 在方程(18)中应用 Kronecker 积可使得矩阵  $\tilde{D}_1$  产生  $(n+l)^2$  维矢量  $d_1$ , 其分量依赖于  $\lambda(\cdot)$  集. 为了满足 Frobenius 条件, 可采用  $\lambda(\cdot)$  不等式型约束及选择  $d_1$ , 使其满足对矩阵  $\tilde{D}_1 = \tilde{D}_1^T > 0$  的  $(n+l)$  组约束. 由于方程数不少于未知项的数目,  $\lambda(\cdot)$  集满足上述约束且使得矢量  $q$  产生一正定矩阵.

采用类似的代数方程, 可在把矩阵  $\tilde{\Delta}'$  的一部分用于预设计而其另一部分通过设计步骤求得的情形下, 对矩阵  $\tilde{\Delta}''$  重新进行设计. 为了满足 Frobenius 定理, 矩阵  $(\tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}'')$  需满足其列数不少于行数的必需条件  $l_p^2 + l_c^2 + l_f^2 - mp \geq n(l+n-m)$ , 即预补偿器、前馈控制器和反馈控制器之一的阶数与系统维数相比为充分大. 在此情形下系统满足可解性的秩条件  $\text{rank}(\tilde{\Delta}_2) = \text{rank}[\nu - \tilde{\Delta}_1 \tilde{k}_1] = l_p^2 + l_c^2 + l_f^2 - mp + n(l+m) + l^2$ . 注意到对阶数  $l$  及方程(18), (19)中的约束条件产生一个镇定控制器的最低阶数  $l_0$ . 因此, 需在  $l \geq l_0$  的约束条件下选择适当的控制器阶数  $l$ .

### 策略 2(时变控制器).

在此情形下, 可在时刻  $t - \sigma$  求得矩阵  $\tilde{\Delta}'$ , 然后用于设计时刻  $t$  的矩阵  $\tilde{K}$ . 因此, 可根据策略 1 中给出的一组时间相关方程重新进行设计.

### 步骤 2.

采用步骤 1 中由 Kronecker 积计算所得的矢量  $\tilde{k}$  可对方程(9)中的控制矩阵进行计算. 为简明起见, 可在时刻  $t$  求得时刻  $t' < t$  时的控制矩阵  $\tilde{\Delta}'$ . 再从矩阵块(1,1), (1,2), (1,4), (3,1), (3,2), (3,4)中获得矩阵积  $D_c D_f, D_c C_p, D_c C_f, M_c D_f, M_c C_p, M_c C_f$ , 其紧凑形式为  $[D_c^T : M_c^T] X = [M_1^T : M_2^T]$ ;  $X = [D_f : C_p : C_f]$ , 矩阵  $D_c, M_c, X, M_1, M_2$  的维数分别为  $m \times m_p, l_c \times m_p, m_p \times (m_f + l_p + p)$  (因为  $m_p = m_f, p = l_f$ ),  $m \times (m_p + l_p + p), l_c \times (m_p + l_p + p)$ . 由于矩阵  $M_{1,2}$  从块矩阵  $\tilde{K}$  中求得, 若预先选定矩阵对  $(D_c, M_c)$  使得  $\text{rank}[D_c^T : M_c^T] = \text{rank}[D_c^T : M_c^T : M_1^T : M_2^T]$ , 则存在(非唯一)解矩阵  $X$ . 若  $m_c + l_c = m + l_c = m_p^2$  且选择矩阵对  $(D_c, M_c)$  使得  $\text{Det}([D_c^T : M_c^T]) \neq 0$ , 则存在唯一解  $X = [D_f : C_p : C_f] = [D_c^T : M_c^T]^{-T} [M_1^T : M_2^T]^T$ . 若矩阵  $M_{1,2}$  在时刻  $t$  为零, 则可以选择矩阵集  $(D_c, M_c, D_f, C_p, C_f)$  恒等于零.

### 仿真例子

考虑三阶实不变 SPVD 系统(8)的参数计算, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2.4 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} -2.8 & -3.7 & 6.7 \\ -2.2 & -1.2 & 0 \\ 0 & -3.6 & -7.2 \end{bmatrix}, M = E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1.27 & 0 \\ -1 & 1.07 & 1.56 \end{bmatrix}.$$

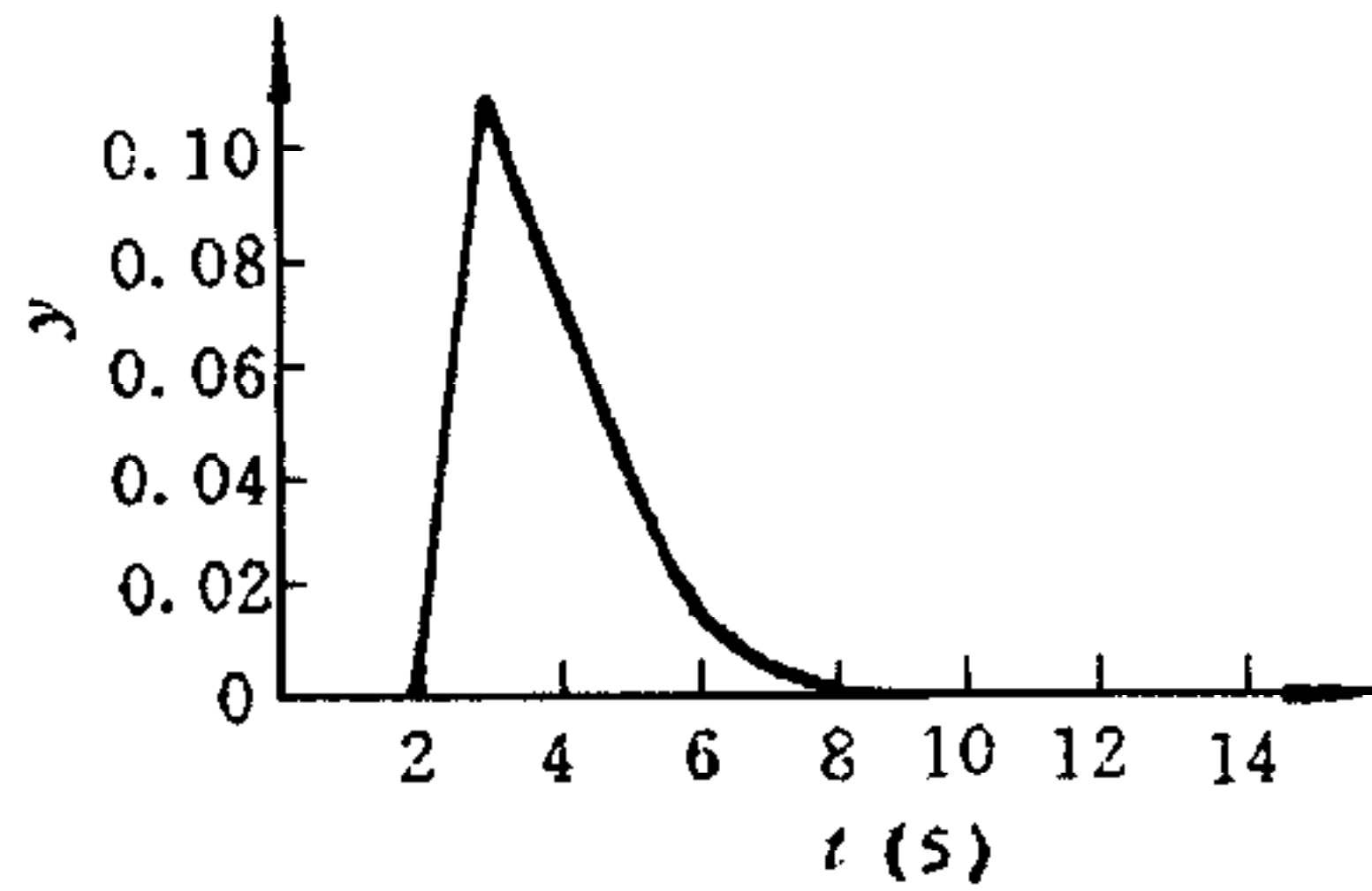
方程(8)中的其余参数矩阵为零, 点型内时延为  $h = 0.1$ , 点型外时延为  $h' = 0.4$ , 分布型时延为零. 此例中参考信号恒等于零, 因此上述系统为调节器型. 采用策略 1 来设计动态时不变控制器(9), 其参数如下:

$$A_p = \text{Block Diag}[-1.682, -1.33774, -2.000067],$$

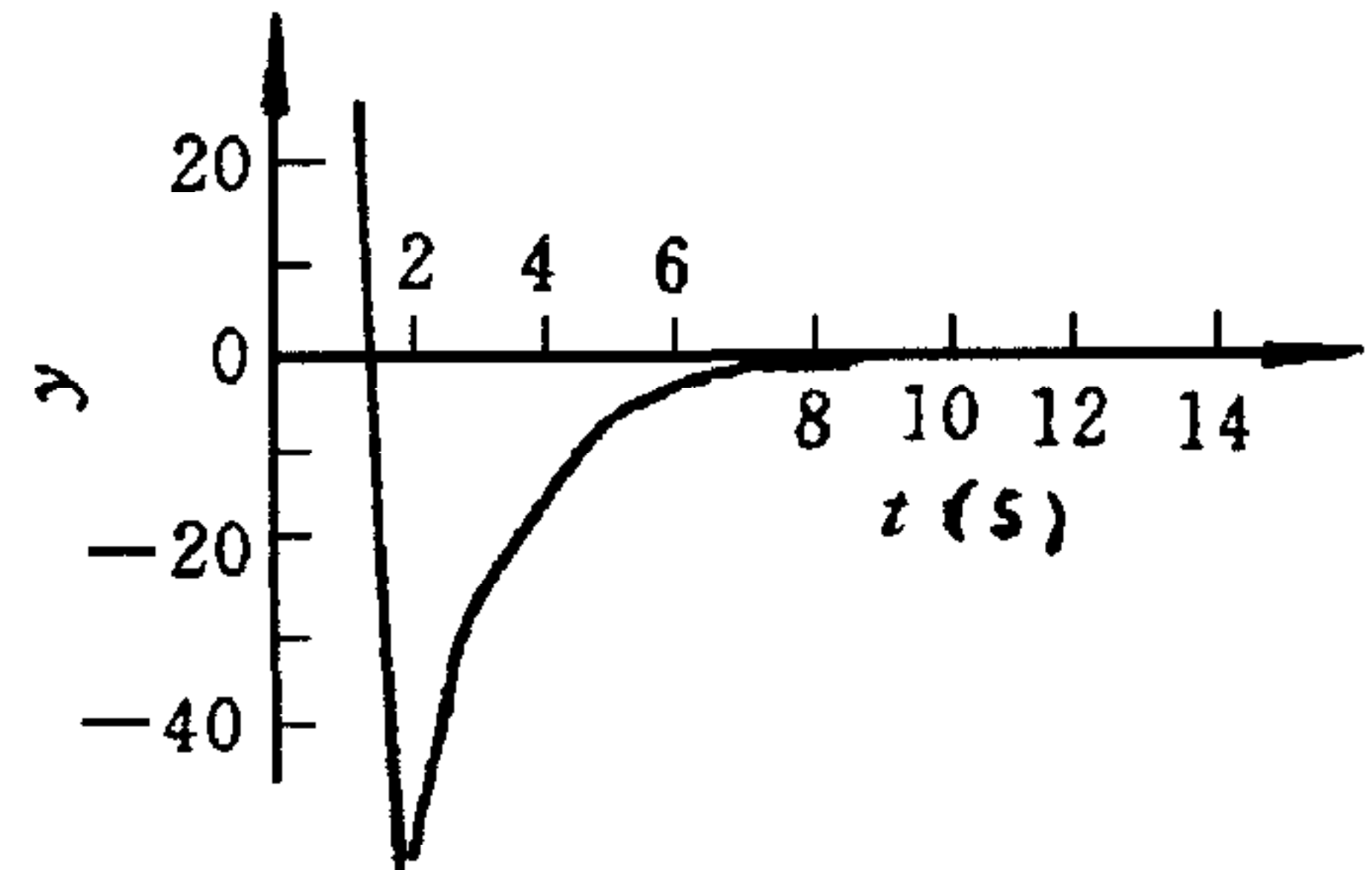
$$C_p = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.273 \end{bmatrix}, D_f = \begin{bmatrix} -1.26 & -3.035 & 4.11 \\ 1.43 & 5.76 & -1 \\ 1 & -11.23 & 6.056 \end{bmatrix}, D_c = \begin{bmatrix} 0.640 & 0 & 0 \\ 0 & -0.045 & -0.250 \\ 0 & 0.389 & -0.150 \end{bmatrix}.$$



方程(9)中的其余矩阵恒等于零,因此,可在图1中略去前馈控制器增益 $k_c$ .反馈控制器 $k_f$ 为静态控制器,预补偿器 $k_p$ 为三阶动态补偿器,即整体扩展系统为三阶系统.闭环系统输出的第一分量和输入的第三分量分别示于图2和图3.通过其它参数设计,可以同样确保系统的镇定性.假设系统为单输入双输出系统,矩阵 $C, M, E$ 为 $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $M = E = [1, 1, 1]^T$ ,则在此情形下采用相同的矩阵 $A_p$ ,并选择 $d_c = -90.25$ ;  $d_f = 150.76$ ,可得闭环极点 $(-206, 479, -1.47629, -0.414431)$ ;若选择 $d_c = -100.25$ ;  $d_f = 150.76$ ,可得闭环极点 $(-196.215, -1.01753 \pm 0.995646j)$ .在上述两种情形中,预补偿器的开环极点为 $(-1.682, -1.33774, -2.00067)$ .

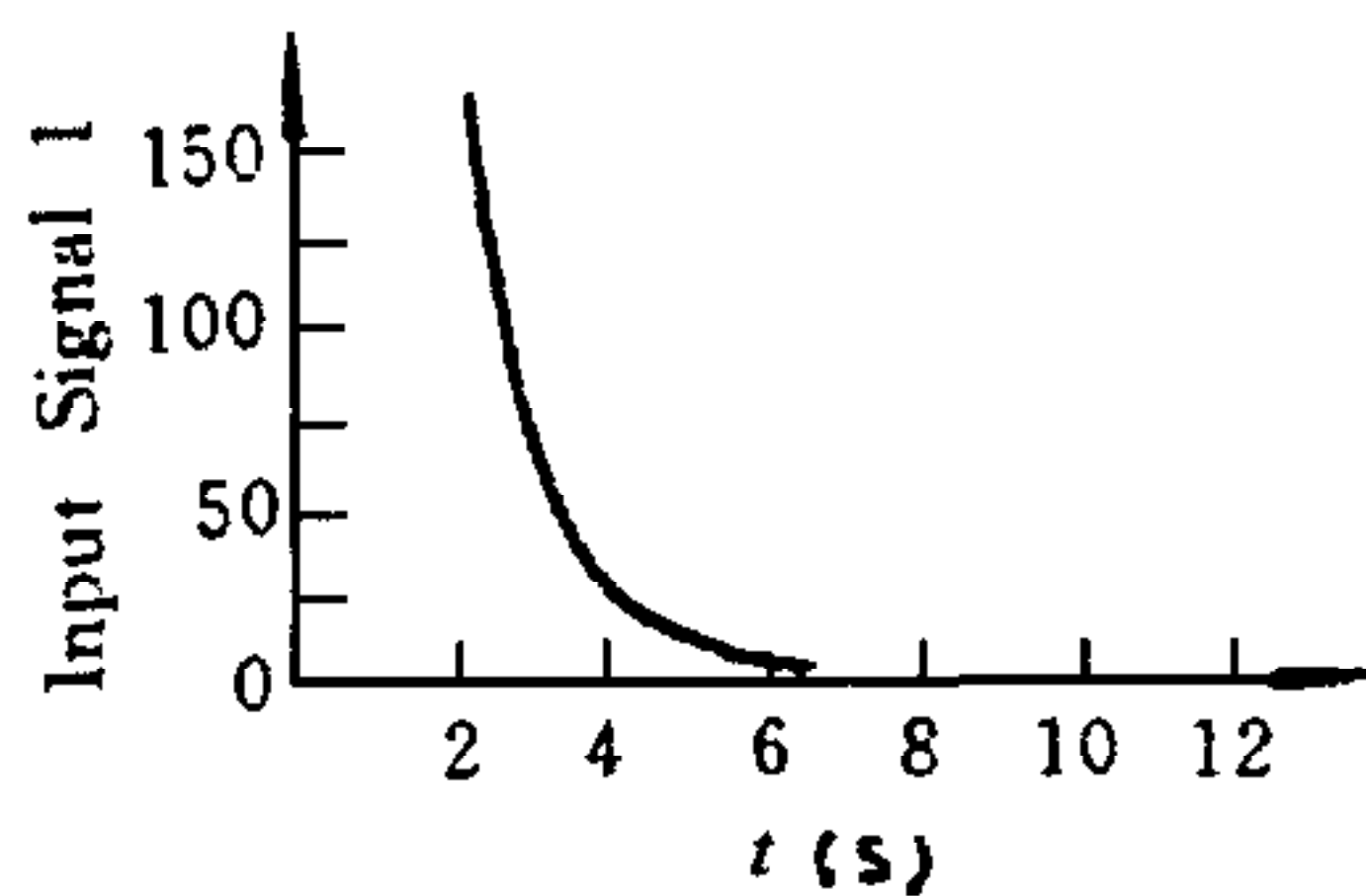


(a)零初值条件下的调节输出

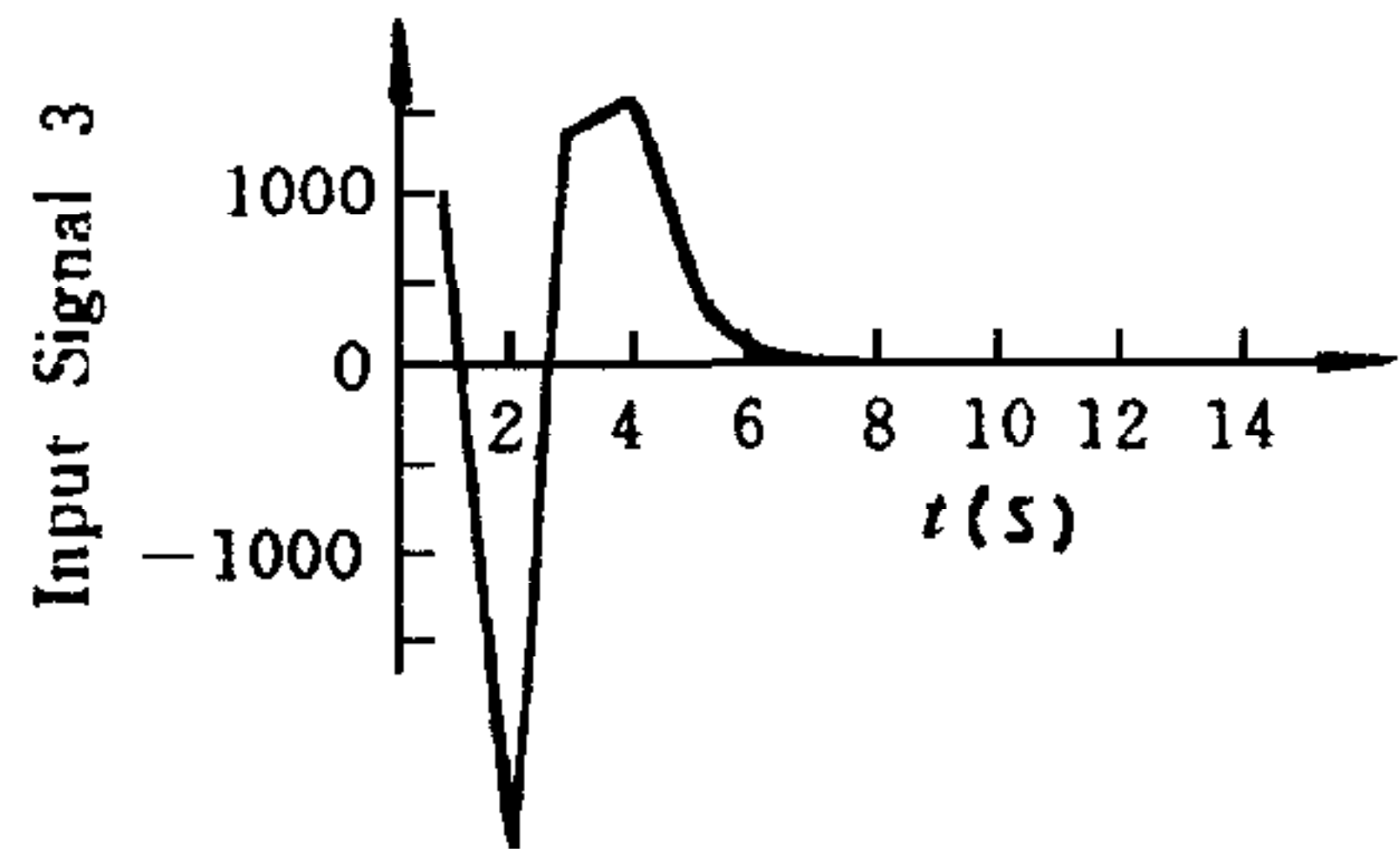


(b)初值条件时的调节输出

图 2



(a)在图 2(b)试验条件下的输出分量 1



(b)在图 2(b)试验条件下的输入分量 3

图 3

**致谢** 对西班牙科学技术委员会通过科研项目 PB93-0005 给予的支持表示感谢。

### 参 考 文 献

- [1] M de la Sen. Fundamental properties of linear control systems with after-effect, Part I :The continuous case, Part II ;Extensions including the discrete case. *Math. Comput. Modelling*, 1988, **10**(7):473—502.
- [2] Burton T A. *Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations*, New York:Academic Press, 1985.
- [3] Pandolfi L. Generalized control systems boundary control systems and delayed control systems. *Math. Control Signal Syst.*, 1990, **3**:165—181.
- [4] Lee E B, Olbrot A. Observability and related structural results for linear hereditary systems. *Int. J. Control*, 1981, **34**(6):1016—1078.
- [5] Watanabe K. Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1986, **31**(6):543—550.

- [6] Agathoklis P, Foda S. Stability and the matrix Lyapunov equation for delay differential systems. *Int. J. Control*, 1989, **49**(2):417–432.
- [7] Tadmor G. Trajectory stabilizing controls in hereditary linear systems. *SIAM J. Control Optim.*, 1988, **26**(1):138–154.
- [8] Alastruey C F, M de la Sen, González de Mendivil J R. The stabilizability of integro-differential systems with two distributed delays. *Math. Comput. Modelling*, 1995, **21**(8):85–94.
- [9] M de la Sen. On the stabilizability, controllability and observability of linear hereditary systems with distributed commensurate delays. *Int. J. Syst. Sci.*, 1993, **24**(1):33–52.
- [10] M de la Sen. On some structures of stabilizing control laws for linear and time-invariant systems with bounded point delays and unmeasurable states. *Int. J. Control*, 1994, **59**(2):529–541.
- [11] M de la Sen, Luo N. Discretization and FIR filtering of continuous linear systems with internal and external point delays. *Int. J. Control*, 1994, **60**(6):1223–1246.
- [12] Luo N, M de la Sen. Output feedback stabilization of a class of internally delayed systems. *Int. J. Syst. Sci.*, 1995, **26**(2):421–433.
- [13] Zheng F, Cheng M, Gao W-B. Feedback stabilization of linear systems with distributed delays in state and control variables. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **39**(8):1714–1718.

## ON THE DESIGN OF UNIVERSAL STABILIZING CONTINUOUS LINEAR CONTROLLERS WITH DELAYS FOR GENERALIZED DELAYED CONTINUOUS STABILIZABLE SYSTEMS

M DE LA SEN LUO NINGSU

(Dpto. Electricidad y Electrónica, Universidad del País Vasco, 48940 Leioa, Bizkaia, SPAIN)

**Abstract** This paper deals with the design problem of generalized linear stabilizing controllers for linear systems with after-effect so that the resulting closed-loop system is globally uniformly asymptotically stable in the Lyapunov's sense. The stabilizing controllers are universal in the sense that they include the usual delays (namely, point, distributed and mixed point-distributed delays) which can be finite, infinite or even time-varying.

**Key words** Delay systems, point delays, distributed delays, Lyapunov's stability, stabilizing controllers.

**M de la Sen** 毕业于西班牙巴斯克大学, 1975 和 1979 年分别获巴斯克大学应用物理学硕士和应用物理学博士, 1987 年获法国格雷诺贝尔大学物理学国家博士. 现在西班牙巴斯克大学任系统和控制工程教授.

**罗宁苏** 毕业于中国科技大学, 1985 年获该校系统科学和管理科学硕士学位, 1989 年获东南大学自动控制工程博士学位, 1994 年获西班牙巴斯克大学物理学博士学位. 先后在西班牙巴斯克大学和加泰罗尼亚大学从事博士后研究, 现任巴斯克大学教授.