



加权函数阵与闭环零极点¹⁾

张本勇 裘聿皇

(中国科学院自动化研究所 北京 100080)

关键词 H_∞ 控制, 混合灵敏度问题, 加权函数阵

1 引言

鲁棒控制试图在系统性能和鲁棒性之间取得平衡. 通过选择适当的加权阵, 把常规控制设计问题转化为标准 H_∞ 控制问题求解, 可以兼顾系统性能与鲁棒性, 这种方法称为混合灵敏度 H_∞ 方法.

混合灵敏度 H_∞ 方法的核心思想认为, 闭环系统的性能指标可以通过适当地选择灵敏度函数阵的加权函数阵来达到, 而适当选择互补灵敏度函数阵的加权函数阵可以达到系统的鲁棒稳定性指标. 本文表明, 加权函数阵的零极点与闭环系统和控制器零极点之间存在密切联系.

2 问题描述

考虑如下配置的多输入多输出反馈控制系统

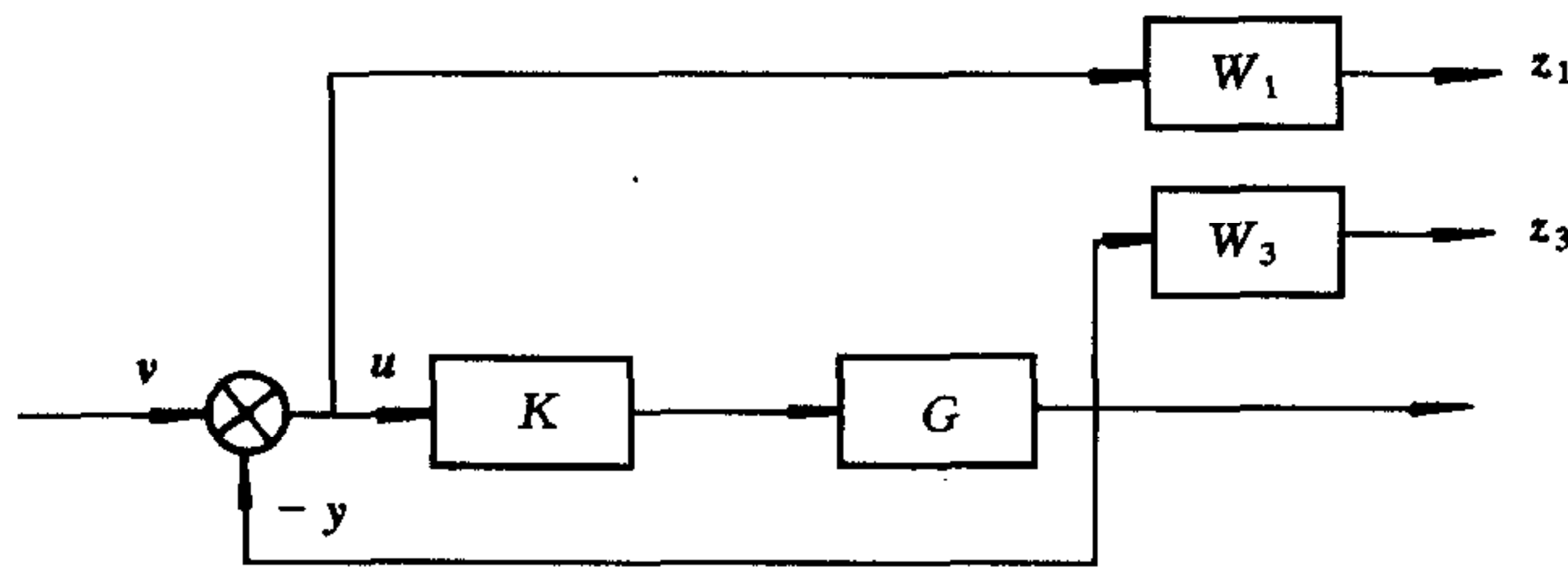


图1 加权混合灵敏度问题

其中 $y(t) \in R^m$ 为外加信号, 包括命令输入、量测干扰等, $u(t) \in R^m$ 为控制信号, $y(t) \in R^m$ 为量测输出, $z_1(t) \in R^m, z_3(t) \in R^m$ 为受控输出, $K(\cdot) \in R^{r \times m}$ 为控制器, $G(\cdot) \in R^{m \times r}$ 为对象, $W_1(\cdot) \in R^{m \times m}, W_3(\cdot) \in R^{m \times m}$ 为加权函数阵. 加权混合灵敏度问题: 求镇定 G 的控制器 K , 使

1) 国家自然科学基金资助项目.

$$\|T_{zy}\|_{\infty} = \min \left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3 T \end{bmatrix} \right\|_{\infty}, \quad (1)$$

其中 $z = [z_1 \ z_3]^T$, $S = (I + G(s)K(s))^{-1}$ 为灵敏度函数阵, 反映闭环性能, S 的奇异值越小, 系统抑制外扰动的能力越强, 同时对命令输入的跟踪精度越高.

$T = G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1}$, 为互补灵敏度函数阵, 反映系统在模型扰动下的鲁棒稳定性, T 的奇异值越小, 系统抗模型扰动的稳定区域越大, 鲁棒稳定性越好.

W_1, W_3 为相应于 S, T 的加权函数阵. 在文献[4]中, 讨论了 $W_1(s), W_3(s)$ 为方的对角阵且对角线元素相等时的情形, 即 $W_1(s) = \omega_1(s)I_m, W_3(s) = \omega_3(s)I_m$, 其中 I_m 为 $m \times m$ 单位阵, $\omega_1(s), \omega_3(s)$ 为 s 的有理分式函数. 本文讨论一般情形的加权函数阵, 即 $W_1(s) = W_{1n}(s)\omega_{1d}^{-1}(s), W_3(s) = W_{3n}(s)\omega_{3d}^{-1}(s)$. 其中, $W_{1n}(s), W_{3n}(s)$ 为 s 的多项式阵, $\omega_{1d}(s), \omega_{3d}(s)$ 为 s 的多项式. 下面引入几个记号:

设 $P(s)$ 为任意有理分式阵, 记 $\tilde{P}(s) := P(-s)^T, \bar{\sigma}(P(s))$ 为 $P(s)$ 的最大奇异值.

设 $f(s)$ 为 s 的多项式, $N(s)$ 为 s 的多项式阵, 如果 $f(s)$ 整除 $N(s)$ 的每个分量, 则记为 $N(s) \equiv 0 \pmod{f(s)}$ 或记为 $f(s) | N(s)$, 否则记为 $f(s) \nmid N(s)$. 如果 $f(s)$ 的任何因子不整除 $N(s)$, 则称 $f(s)$ 和 $N(s)$ 互质.

对任何阵 $P(s), Z(P(s)), P(P(s))$ 分别为 $P(s)$ 的零点集合和极点集合, 即 $Z(P(s)) := \{z \in \mathbb{C} : z \text{ 为 } P(s) \text{ 的零点}\}, P(P(s)) := \{p \in \mathbb{C} : p \text{ 为 } P(s) \text{ 的极点}\}.$

3 主要结果

引理 1^[1]. 对混合灵敏度问题的单值化解, 如果

$$\gamma_0^2 = \min_{K \text{ 镇定 } G} \sup \|T_{zy}\|_{\infty}^2 = \min \sup \bar{\sigma} \left(\begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3 T \end{bmatrix} \right),$$

则必有

$$\begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3 T \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3 T \end{bmatrix} = \gamma_0^2 I_m, \quad (2)$$

其中 γ_0 为实数.

这里讨论限于这类具有单值化性质(equalizing property)的解, 这类解除了具有引理(1)的性质外, 还有一个良好特性: 它们是所有解中控制器阶数最低的解. 对单变量系统($m=1$), 所有解都是单值化解; 对多变量系统, 存在阶数更高的非单值化解.

引理 2. 设 $N(s)$ 为方的多项式阵, $f(s)$ 为既约多项式, $f(s)$ 的零点全部位于左半平面或全部位于右半平面, $N(s)$ 的零点全部位于左半平面或全部位于右半平面. 如果

$$\tilde{N}(s)N(s) = 0 \pmod{f(s)},$$

则必有 $f(s) | \tilde{N}(s)$ 或 $f(s) | N(s)$.

证明略.

不失一般性, 本文以下均设 $W_1(s) = W_{1n}(s)\omega_{1d}^{-1}(s), W_3(s) = W_{3n}(s)\omega_{3d}^{-1}(s)$, 其中 $\omega_{1d}(s), \omega_{3d}(s)$ 分别和 $W_{1n}(s), W_{3n}(s)$ 互质, $\omega_{1d}(s), \omega_{3d}(s), W_{1n}(s), W_{3n}(s)$ 的零点都在左半平面.

设 $G(s)K(s) = N_0(s)D_0^{-1}(s)$, 其中 $N_0(s), D_0(s)$ 为右互质多项式阵, $\det(N_0(s)) = 0$

的根为开环零点, $\det(D_0(s))$ 的根为开环极点. 通过简单计算得灵敏度函数阵 S :

$$S = (I + G(s)K(s))^{-1} = (I + N_0(s)D_0^{-1}(s))^{-1} = D_0(s)(D_0(s) + N_0(s))^{-1} \quad (3)$$

互补灵敏度函数阵 T :

$$\begin{aligned} T &= G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} = N_0(s)D_0^{-1}(s)(I + N_0(s)D_0(s)^{-1})^{-1} \\ &= N_0(s)(D_0(s) + N_0(s))^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

由于 $N_0(s), D_0(s)$ 右互质, 则必有 $N_0(s), (N_0(s) + D_0(s))$ 右互质, 故由(4)式知: $\det(N_0(s)) = 0$ 的根为闭环零点, $\det(N_0(s) + D_0(s)) = 0$ 的根为闭环极点. 由矩阵求逆公式, 如果记 $d_{cl}(s) = \det(D_0(s) + N_0(s))$, 则有:

$$(D_0(s) + N_0(s))^{-1} = A_1(s)d_{cl}^{-1}(s) \quad (5)$$

其中 $A_1(s)$ 为 $D_0(s) + N_0(s)$ 的伴随矩阵, $\det(A_1(s)) = d_{cl}^{m-1}(s)$, 由(5)式可得:

$$A_1(s)(D_0(s) + N_0(s)) = d_{cl}(s)I_m \quad (6)$$

由(6)式, 设 $A_1(s)$ 的所有元素的最大公因子为 $\alpha(s)$, 则必有 $\alpha(s) | d_{cl}(s)$. 设 $d_{cl}(s) = d(s)a(s)$, 由(5)式有:

$$(D_0(s) + N_0(s))^{-1} = A(s)d^{-1}(s) \quad (7)$$

其中 $A(s)$ 的所有元素的最大公因子为 1, $d(s) | d_{cl}(s)$.

将(3), (4)(7)代入(2)式, 并代入 $W_1(s), W_3(s)$ 的表达式, 可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3 T \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3 T \end{bmatrix} = [\tilde{S} \tilde{W}_1 \tilde{T} \tilde{W}_3] \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3 T \end{bmatrix} = \tilde{S} \tilde{W}_1 W_1 S + \tilde{T} \tilde{W}_3 W_3 T \\ &= \frac{1}{\omega_{1d} \omega_{1d} \omega_{3d} \omega_{3d} \omega_d \omega_d} [\tilde{A} \tilde{D}_0 \tilde{W}_{1n} W_{1n} D_0 A \tilde{\omega}_{3d} \omega_{3d} + \tilde{A} \tilde{N}_0 \tilde{W}_{3n} W_{3n} N_0 A \tilde{\omega}_{1d} \omega_{1d}] \\ &= \gamma_0^2 I_m. \end{aligned} \quad (8)$$

于是可得

定理 1. 设 $g(s)$ 为 $W_{1n}(s), W_{3n}(s)$ 的最大公因子, 则 $Z(g(s)) \subseteq Z(d_{cl}(s))$.

证明略.

注. Kwarkernaak^[5]对单变量系统得到类似的结果. 可以利用此性质来部分配置系统的极点, 可参考文献[5]的例子.

定理 2. 设系统开环稳定, $m \geq 2$

i) 设 $h(s) | \omega_{1d}(s), (h(s), \omega_{3d}(s)) = 1$, 且 $h(s)$ 不含有对象极点, $h(s) \nmid \det(W_{1n}(s))$ 则 $Z(h(s)) \subseteq P(K(s))$;

ii) 设 $l(s) | \omega_{1d}(s), (l(s), \omega_{3d}(s)) = 1$, 且 $l(s) \nmid W_{1n}(s)D_0(s)$, 则

$$Z(l(s)) \subseteq Z(d_{cl}(s)).$$

证明.

i) 由假设条件和(8)式可得

$$\tilde{A} \tilde{D}_0 \tilde{W}_{1n} W_{1n} D_0 A \equiv 0 \pmod{h(s)}.$$

由于 $\det(A) = d(s)^{m-1} = 0$ 的根为闭环极点, 必位于左半平面内, $\det(D_0) = 0$ 的根为开环极点, 由假设也位于左半平面内, 由引理 2, 对 $h(s)$ 的任一素因子 $f(s)$, 要么有 $f(s) | W_{1n} D_0 A$, 要么 $f(s) | \tilde{A} \tilde{D}_0 \tilde{W}_{1n}$. 而 $f(s)$ 是稳定的, 故必有

$$W_{1n} D_0 A \equiv 0 \pmod{f(s)} \quad (9)$$

$A(s)$ 的所有分量的最大公因子为 1, 故 $f(s) \nmid A(s)$. 这样, 至少存在 A 的一列 A_j 使得

$$W_{1n}D_0A_j \equiv 0(\text{mod } f(s)), f(s) \nmid A_j$$

由域上线性方程组的性质知必有

$$\det(W_{1n}D_0(s)) \equiv 0(\text{mod } f(s))$$

注意到 $f(s) \nmid \det(W_{1n}(s)), \det(D_0(s))=0$ 的根为开环极点, $f(s)$ 中没有对象极点, 故控制器极点中必含有 $f(s)$ 的零点, 即: $Z(f(s)) \subseteq P(K(s))$. 由 $f(s)$ 的任意性知必有 $Z(h(s)) \subseteq P(K(s))$.

ii) 类似 i) 前半部分的推导, 可证明对 $l(s)$ 的任意素因子 $f(s)$, 也有 (9) 成立. 由假设 $f(s) \nmid W_{1n}D_0(s)$, 故必存在 $W_{1n}D_0(s)$ 的一行 X_i , 使得 $X_iA \equiv 0(\text{mod } f(s)), f(s) \nmid X_i(s)$. 由域上线性方程组的性质知 $\det(A) \equiv 0(\text{mod } f(s))$. 而 $\det(A) = d^{m-1}(s), m \geq 2$, 故有 $f(s) \mid d^{m-1}(s)$, 即 $Z(f(s)) \subseteq Z(d(s)) \subseteq Z(d_{cl}(s))$. 由 $f(s)$ 的任意性, 得 $Z(l(s)) \subseteq Z(d_{cl}(s))$.

证毕.

定理3. 设系统开环零点位于左半平面, $m \geq 2$

i) 设 $h(s) \mid \omega_{3d}(s), (h(s), \omega_{1d}(s)) = 1, h(s)$ 不含有对象极点, $h(s) \nmid \det(W_{3n}(s))$ 则 $Z(h(s)) \subseteq Z(K(s))$

ii) 设 $l(s) \mid \omega_{3d}(s), (l(s), \omega_{1d}(s)) = 1$, 且 $l(s) \nmid W_{3n}N_0(s)$, 则 $Z(l(s)) \subseteq Z(d_{cl}(s))$

证明. 与定理2的证明类似.

4 结论

本文证明了在一定条件下, 加权函数阵的零极点会进入闭环系统和控制器的零极点, 从而影响系统性能, 这种关系是选择加权函数时不可忽视的因素. 在实际工程中选择加权函数阵, 不仅要通过加权函数阵来达到设计指标, 同时还要注意加权函数阵的零极点对系统性能的影响. 如果能适当选择加权阵还可以达到部分配置系统极点的作用.

参 考 文 献

- 1 Kwarkernaak H. A polynomial approach for minimax frequency domain optimization of multivariable system. *Int. J. Control*, 1986, **44**: 117-156
- 2 Doyle J C et al. State space solution to standard H_2 and H_∞ control problem. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, **34**: 831-847
- 3 Safonov M G et al. H_∞ robust control synthesis for a large space structure. *J. Guidance*, 1991, **14**: 513-520
- 4 张本勇, 裘聿皇, 王炎生. 混合灵敏度 H_∞ 方法的加权与闭环零极点. 1995中国控制与决策会议论文集, 沈阳: 东北大学出版社, 355-359
- 5 Kwarkernaak H. Robust control and H_∞ optimization. *Automatica*, 1993, **29**: 255-273

WEIGHTING FUNCTIONS AND ZEROS/POLES OF CLOSED LOOP SYSTEM

ZHANG BENYONG QIU YUHUANG

(Institute of Automation, Academia Sinica, Beijing 100080)

Key words H_∞ control, mixed sensitivity problem, weighting functions