第 24 卷 第 2 期 1998 年 3 月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 24, No. 2 March., 1998

研究简报

仿射非线性奇异系统的可逆性[1)]

王 晶 刘晓平
(东北大学自控系 沈阳 110006)

关键词 仿射非线性系统,奇异系统,可逆性

1 引言

可逆性是控制系统的一个很重要性质,在实际控制中有着广泛的应用,如输出跟踪、模型匹配、解耦及线性化等. 目前关于线性和一般非线性系统的求逆理论已有了较完全、系统的阐述[1—4],而针对奇异系统可逆性的研究却很少. 本文提出了仿射非线性奇异系统的求逆算法,分析系统可逆条件并构造逆系统.

2 求逆算法及主要结果

讨论如下仿射非线性奇异系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = f_1(\boldsymbol{x}) + p_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z} + g_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \\ 0 = f_2(\boldsymbol{x}) + p_2(\boldsymbol{x})z + g_2(\boldsymbol{x})u, \\ \boldsymbol{y} = h(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n, \boldsymbol{z}\in R^s, \boldsymbol{u}\in R^m, \boldsymbol{y}\in R^m$. $f_i(\boldsymbol{x}), p_i(\boldsymbol{x}), g_i(\boldsymbol{x})$ 中的 $i=1,2$,分别是具有相应维数的光滑函数阵. $h(\boldsymbol{x})$ 是 m 维光滑函数向量.

给定初始条件 x_0 及输入 $\boldsymbol{u}$,系统(1)是否有解及解的唯一性、连续性对讨论系统的逆是十分必要的. 下面引入系统(1)可解的概念.

定义 1. 如果对给定初始条件 x_0 及任意分段连续输入 $\boldsymbol{u}$,总存在唯一的连续可微的状态变量 $\boldsymbol{x}(t)$ ($\boldsymbol{x}(0)=x_0$)和唯一的分段连续的约束变量 $\boldsymbol{z}(t)$ 满足系统(1),则称系统(1)是可解的.

本文将在系统(1)是可解的条件下讨论其可逆性. 值得注意的是系统(1)可解并不意味着逆系统一定可解. 如果逆系统不可解,亦称系统(1)的逆不存在.

求逆算法

第 0 步:假设在 x_0 邻域内,矩阵 $\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}h(x) & L_{g_1}h(x) \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} g_2(x) \\ L_{g_1}h(x) \end{bmatrix}$ 分别具有定常秩

1) 国家自然科学基金、霍英东基金、国家教委跨世纪人才基金资助课题.
收稿日期 1996-04-22

ρ_0, m_0,则存在一非奇异矩阵 $E_0(\boldsymbol{x})_{(m+s)\times(m+s)}$,使得

$$E_0(\boldsymbol{x})\begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ L_{p_1}h(x) & L_{g_1}h(x)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p}_2^0(\boldsymbol{x}) & \bar{g}_2^0(\boldsymbol{x}) \\ \bar{g}_2^0(\boldsymbol{x}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中$[\bar{g}_2^0(x)]$和 $\begin{bmatrix} \bar{p}_2^0(\boldsymbol{x}) & \bar{g}_2^0(\boldsymbol{x}) \\ \bar{p}_2^0(\boldsymbol{x}) & 0 \end{bmatrix}_{\rho_0\times(m+s)}$ 在 x_0 邻域内是行满秩的. 于是约束方程与输出方程可写成

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}_0(\boldsymbol{x}) \\ \bar{\omega}_0(\boldsymbol{x}) \\ \hat{\omega}_0(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_2^0(\boldsymbol{x}) \\ \bar{f}_2^0(\boldsymbol{x}) \\ f_2^0(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{p}_2^0(\boldsymbol{x}) \\ \bar{p}_2^0(\boldsymbol{x}) \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{z} + \begin{bmatrix} \bar{g}_2^0(\boldsymbol{x}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}, \tag{2}$$

其中

$$\omega_0 = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_0(\boldsymbol{x}) \\ \bar{\omega}_0(\boldsymbol{x}) \\ \hat{\omega}_0(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\boldsymbol{y}} \end{bmatrix}.$$

第 k 步:假定由 $k-1$ 步得到方程

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}_{k-1}(\boldsymbol{x}) \\ \bar{\omega}_{k-1}(\boldsymbol{x}) \\ \hat{\omega}_{k-1}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) \\ \bar{f}_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) \\ f_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{p}_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) \\ \bar{p}_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{z} + \begin{bmatrix} \bar{g}_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}. \tag{3}$$

对(3)式中第三个方程求导得:

$$\dot{\hat{\omega}}_{k-1}(\boldsymbol{x}) = \hat{f}_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) + \hat{p}_2^{k-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z} + \hat{g}_2^{k-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \tag{4}$$

其中 $\hat{f}_2^{k-1} = L_{f_1}f_2^{k-1}(\boldsymbol{x})$, $\hat{p}_2^{k-1} = L_{p_1}f_2^{k-1}(\boldsymbol{x})$和 $\hat{g}_2^{k-1} = L_{g_1}f_2^{k-1}(\boldsymbol{x})$. 假设在 x_0 邻域内,矩阵 $\begin{bmatrix} \bar{p}_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) & \bar{g}_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) \\ \tilde{p}_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) & 0 \\ \hat{p}_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) & \hat{g}_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} \bar{g}_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) \\ \hat{g}_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$分别具有定常秩 ρ_k 和 m_k. 若 $\rho_k = m+s$,则算法结束. 否则构造一个$(m+s)\times(m+s)$维非奇异矩阵 $E_k(x)$使得:

$$E_k(\boldsymbol{x})\begin{bmatrix} \bar{p}_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) & \bar{g}_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) \\ \bar{p}_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) & 0 \\ \hat{p}_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) & \hat{g}_2^{k-1}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p}_2^k(\boldsymbol{x}) & \bar{g}_2^k(\boldsymbol{x}) \\ \bar{p}_2^k(\boldsymbol{x}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $\bar{p}_2^k(\boldsymbol{x})$, $\bar{g}_2^k(\boldsymbol{x})$, $\tilde{p}_2^k(\boldsymbol{x})$ 分别是 $m_k\times s$, $m_k\times m$, $(\rho_k - m_k)\times s$ 维, 且矩阵 $\begin{bmatrix} \bar{p}_2^k(\boldsymbol{x}) & \bar{g}_2^k(\boldsymbol{x}) \\ \tilde{p}_2^k(\boldsymbol{x}) & 0 \end{bmatrix}$和 $\bar{g}_2^k(x)$在 x_0 邻域内行满秩. 于是可得如下方程:

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}_k(\boldsymbol{x}) \\ \bar{\omega}_k(\boldsymbol{x}) \\ \hat{\omega}_k(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_2^k(\boldsymbol{x}) \\ \bar{f}_2^k(\boldsymbol{x}) \\ f_2^k(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{p}_2^k(\boldsymbol{x}) \\ \bar{p}_2^k(\boldsymbol{x}) \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{z} + \begin{bmatrix} \bar{g}_2^k(\boldsymbol{x}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}, \tag{5}$$

其中

$$\omega_k = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_k(\boldsymbol{x}) \\ \bar{\omega}_k(\boldsymbol{x}) \\ \hat{\omega}_k(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = E_k(x)\begin{bmatrix} \omega_{k-1}(\boldsymbol{x}) \\ \bar{\omega}_{k-1}(\boldsymbol{x}) \\ \dot{\hat{\omega}}_{k-1}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}.$$

定义 2. 满足上述求逆算法中常秩假定的点 x_0,称为求逆算法的正则点.

定理 3:对满足求逆算法的正则点,如果存在最小整数 α,使得 $\rho_\alpha=m+s$,且 $\alpha=1$ 或 $1\leqslant\alpha\leqslant\infty$,对所有 $0\leqslant j\leqslant\alpha-1-k,0\leqslant k\leqslant\alpha-1$,有 $L_{p_1}L_{f_1}^jE_k(\boldsymbol{x})=0$ 和 $L_{g_1}L_{f_1}^jE_k(\boldsymbol{x})=0$ 成立,那么系统(1)在 x_0 点可逆。

证明:如果 $\rho_\alpha=m+s$,则 $m_\alpha=m$,即方程

$$\begin{bmatrix}\bar{\omega}_\alpha(\boldsymbol{x})\\ \tilde{\omega}_\alpha(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{f}_2^\alpha(\boldsymbol{x})\\ \tilde{f}_2^\alpha(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{p}_2^\alpha(\boldsymbol{x})\\ \tilde{p}_2^\alpha(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}\boldsymbol{z}+\begin{bmatrix}\bar{g}_2^\alpha(\boldsymbol{x})\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u} \tag{6}$$

中矩阵 $\bar{g}_2^\alpha(\boldsymbol{x})$在 x_0 点非奇异,于是可唯一地解出输入 $\boldsymbol{u}$ 为

$$\boldsymbol{u}=(\bar{g}_2^\alpha(\boldsymbol{x}))^{-1}(-\bar{f}_2^\alpha(\boldsymbol{x})-\bar{p}_2^\alpha(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}+\bar{\omega}_x).$$

此时就得系统(1)的逆系统(*):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=&(f_1(\hat{\boldsymbol{x}})-g_1(\hat{\boldsymbol{x}})(\bar{g}_2^\alpha(\hat{\boldsymbol{x}}))^{-1}\bar{f}_2^\alpha(\hat{\boldsymbol{x}}))+(p_1(\hat{\boldsymbol{x}})-g_1(\hat{\boldsymbol{x}})(\bar{g}_2^\alpha(\hat{\boldsymbol{x}}))^{-1}\bar{p}_2^\alpha(\hat{\boldsymbol{x}}))\hat{\boldsymbol{z}}\\&+g_1(\hat{\boldsymbol{x}})(\bar{g}_2^\alpha(\hat{\boldsymbol{x}}))^{-1}\bar{\omega}_\alpha(\hat{\boldsymbol{x}}),\hat{x}_0=x_0,\\0=&\tilde{\omega}_\alpha(\hat{\boldsymbol{x}})-\tilde{f}_2^\alpha(\hat{\boldsymbol{x}})-\tilde{p}_2^\alpha(\hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{z}},\\\hat{\boldsymbol{y}}=&(\bar{g}_2^\alpha(\hat{\boldsymbol{x}}))^{-1}(-\bar{f}_2^\alpha(\hat{\boldsymbol{x}})-\bar{p}_2^\alpha(\hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{z}}+\bar{\omega}_\alpha(\hat{\boldsymbol{x}})).\end{aligned}\tag{7}$$

当 $\alpha=1$ 或 $1\leqslant\alpha\leqslant\infty$,对所有 $0\leqslant j\leqslant\alpha-1-k,0\leqslant k\leqslant\alpha-1$,有 $L_{p_1}L_{f_1}^jE_k(\boldsymbol{x})=0$ 和 $L_{g_1}L_{f_1}^jE_k(\boldsymbol{x})=0$ 成立,必存在两个分别为 $m\times\alpha m$ 维和 $s\times\alpha m$ 维的矩阵 $H_\alpha(\boldsymbol{x})$和 $J_\alpha(\boldsymbol{x})$①,使得

$$\begin{bmatrix}\bar{\omega}_\alpha(\boldsymbol{x})\\ \bar{\omega}_\alpha(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_\alpha(\boldsymbol{x})\\ J_\alpha(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}^{(1)}(t)\\ \vdots\\ \boldsymbol{y}^{(\alpha)}(t)\end{bmatrix}. \tag{8}$$

特别应该指出的是如果 $\hat{\boldsymbol{u}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}^{(1)}(t)\\ \vdots\\ \boldsymbol{y}^{(\alpha)}(t)\end{bmatrix}$,则 $\hat{\boldsymbol{y}}(t)=\boldsymbol{u}(t)$,其中 $\boldsymbol{y}(t)$是系统(1)在输入 $\boldsymbol{u}(t)$作用下的输出。现在讨论逆系统(*)的可解性. 因为 $\rho_\alpha=m+s$ 和 $m_\alpha=m$,则 $\tilde{p}_2^\alpha(\boldsymbol{x})$在 x_0 点是非奇异的,又因为 $\hat{x}_0=x_0$,于是由逆系统(*)的约束方程可唯一地求出 $\hat{z}$,所以逆系统(*)在定义 1 意义下可解.

参 考 文 献

1 Sain M. K, Massey J. L, Invertibility of linear time-invariant dynamical systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1969, **14**:141—149

2 Silverman L. M. Inversion of multivariable linear systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1969, **14**:270—276

3 Hirschorn R. M. Invertibility of multivariable nonlinear control systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1979, **24**:855—865

4 Singh S. N. A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems. *IEEE Trans. AutomControl*, 1981, **26**:595—599

① $H_\alpha(\boldsymbol{x})$和 $J_\alpha(\boldsymbol{x})$的构造方法参见文献[3].

INVERTIBILITY OF AFFINE NONLINEAR SINGULAR CONTROL SYSTEMS

WANG JING　　LIU XIAOPING
(*Dept. of Automatic Control, Northeasterm University, Shenyang*　110006)

Keyword　Affine nonlinear system, singular system, invertibility

(下转第 265 页)