第 24 卷 第 2 期
1998 年 3 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 24, No. 2
March., 1998

短 文

关于非线性 Morgan 问题的几点注记

孙振东
（北京航空航天大学第七研究室　北京　100083）

摘　要　对输入数等于输出数加 1 情形的非线性 Morgan 问题，Glumineau & Moog 曾给出一个构造性解. 这一结果最近被指出是错误的. 文章给出上述结果的一个修正，并构造出 10 阶系统，该系统具有唯一的解耦反馈，且解耦后的系统比原系统具有更大的本性阶.

关键词　非线性系统，Morgan 问题，Singh 算法，齐次阶系统.

1　引言及预备知识

Morgan 问题是现代控制理论中的经典问题之一. 这一问题至今没有得到很好地解决. 文献[1]研究了非方系统的非线性 Morgan 问题，给出当系统输出数比输入数小 1 时问题的解. 最近，夏小华举例指出文献[1]的主要结果(Theorem 6)是错误的. 本文对上述结果加以修正，并举例表明非线性 Morgan 问题具有非常复杂的特性.

考虑带输出的仿射非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x} = \boldsymbol{f}(x) + \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{g}_i(x)u_i = \boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{g}(x)u, x \in R^n, u \in R^m,\\ y = \boldsymbol{h}(x), y \in R^p.\end{cases} \tag{1}$$

设在式(1)中，向量 $\boldsymbol{f}(x)$，$\boldsymbol{g}(x)$，$\boldsymbol{h}(x)$的分量是变元 x 的解析函数. 并设 $\mathrm{rank}\boldsymbol{g}(x) = m$，且系统(1)右可逆.

文献[1]给出了非线性 Morgan 问题系统的提法，这里不再赘述. 记系统(1)的(代数)无穷结构(infinite structure)为$\{n_1', \cdots, n_p'\}$，相应于输出 y_i 的本性阶(essential order)为 n_{ie}. 详细的定义参见文献[2].

记 $n_e = \max\{n_{ie}: i = 1, \cdots, p.\}$，及 $l_i = n_e - n_{ie}, i = 1, \cdots, p$. 定义系统(1)的齐次阶系统为

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{O}_{l_1-1}\\ \boldsymbol{h}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{O}_{l_p-1}\\ \boldsymbol{h}_p\\ \boldsymbol{f}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{O}_{(\sum_{i=1}^{p}l_i)\times m}\\ \boldsymbol{g}\end{pmatrix}u, \tag{2a}$$

收稿日期　1996-04-08

$$\bar{y}_i = \begin{cases} h_i & l_i = 0, \\ \bar{x}_{\sum_{k=1}^{i-1} l_k + 1}, & l_i > 0. \end{cases} \tag{2b}$$

可以验证，齐次阶系统(2)的所有本性阶相等(等于 n_e).

对系统(2)实施 Singh 算法(见文献[3])(必要时交换输出变元的顺序)，可得

$$\begin{cases} \bar{y}_1^{(\bar{r}_1)} = \bar{a}_1(\bar{x}) + \bar{b}_1(\bar{x})u, \\ \vdots \\ \bar{y}_k^{(\bar{r}_k)} = \bar{a}_k(\bar{x}, \bar{y}_j^{(l)}, j < k, \bar{r}_j \le l \le \bar{r}_k) + \bar{b}_k(\bar{x}, \bar{y}_j^{(l)}, j < k, \bar{r}_j \le l \le \bar{r}_k - 1)u, \\ \vdots \\ \bar{y}_p^{(\bar{r}_p)} = \bar{a}_p(\bar{x}, \bar{y}_j^{(l)}, j < p, \bar{r}_j \le l \le \bar{r}_p) + \bar{b}_p(\bar{x}, \bar{y}_j^{(l)}, j < p, \bar{r}_j \le l \le \bar{r}_p - 1)u. \end{cases} \tag{3}$$

易知在上述表达式右侧中,不出现 $\bar{y}_i^{(l)}, i=1,\cdots,p, l \le n_e - n_{ie}$,因而(3)可以重新表述为

$$\begin{cases} y_1^{(r_1)} = a_1(x) + b_1(x)u, \\ \vdots \\ y_k^{(r_k)} = a_k(x, y_j^{(l)}, j < k, r_j \le l \le r_k + n_{je} - n_{ke}) + \\ \qquad b_k(x, y_j^{(l)}, j < k, r_j \le l \le r_k + n_{je} - n_{ke} - 1)u, \\ \vdots \\ y_p^{(r_p)} = a_p(x, y_j^{(l)}, j < p, r_j \le l \le r_p + n_{je} - n_{pe}) + \\ \qquad b_p(x, y_j^{(l)}, j < p, r_j \le l \le r_p + n_{je} - n_{pe} - 1)u. \end{cases} \tag{4}$$

可以看到，在表达式(4)中,若 $r_i < n_{ie}$，则在 $y_i^{(r_i)}$ 式的右侧不出现 $y_j^{(n_{je})}$，$j=1,\cdots,p$. 于是由交互圈(interactor)秩(见文献[4]的定义,知集$\{i : r_i < n_{ie}\}$的元素个数为 $p-r^*$,其中 r^* 是系统(1)的交互圈的本性秩.

2 非构造解

在 $m=p+1$ 的情形，只有当系统交互圈的本性秩 r^* 不小于 $p-1$ 时,系统才可能解耦. 此时,对系统实施齐次化的 Singh 算法,可得(参阅式(4))

$$\begin{cases} y_1^{(n_{1e})} = a_1(x) + b_1(x)u, \\ \vdots \\ y_{k-1}^{(n_{(k-1)e})} = a_{k-1}(x) + b_{k-1}(x)u, \\ y_k^{(r_k)} = a_k(x) + b_k(x)u, \\ y_{k+1}^{(n_{(k+1)e})} = a_{k+1}(x, y_k^{(j)}, r_k < j \le n_{ke}) + b_{k+1}(x, y_k^{(j)}, r_k < j \le n_{ke} - 1)u, \\ \vdots \\ y_p^{(n_{pe})} = a_p(x, y_k^{(j)}, r_p < j \le n_{ke}) + b_p(x, y_k^{(j)}, r_p < j \le n_{ke} - 1)u, \end{cases} \tag{5}$$

其中　$r_k = \sum_{i=1}^{p} n_{ie} - \sum_{i=1}^{p} n_i'$.

设阵 $D(x)$: $(m-1)\times m$ 使得矩阵(D^T, b_k^T)非异，作正则反馈变换

$$\begin{cases} v_1 = a_k(x) + b_k(x)u, \\ \begin{pmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = D(x)u, \end{cases}$$

为简便,记在此变换下的系统(1)为

$$\begin{cases} \dot{x} = \boldsymbol{f}(x) + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{g}_m(x)v_m = \boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{g}(x)v, \\ y = \boldsymbol{h}(x). \end{cases} \tag{6}$$

定理 1.　考虑右可逆系统(1). 设 $m=p+1$，则系统(1)可行对行解耦的充分且必要条件是

(i) $r^* \geq p-1$,

(ii) 存在一实函数 $\phi(x)$,和一整数 $\delta \geq \sum_{i=1}^{m} n_{ie} - \sum_{i=1}^{m} n_i'$,使得

$$L_{g^2} L_{f+\phi g_1}^{i} \phi = 0,\ i = 1,\cdots,\delta - 2,$$

$$d(L_{g^2} L_{f+\phi g_1}^{\delta-1} \phi) \notin \varepsilon_n,$$

这里　$\boldsymbol{g}^2 = (\boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_m)$, $\varepsilon_n = \mathrm{span}\{dx, dy, \cdots, dy^{(n)}\}$.

证.　只需考虑 $r^* = p-1$ 的情形.

充分性. 记 $v^2 = (v_2, \cdots, v_m)^T$. 令 $v_1 = \phi(x)$,于是系统(6)化为

$$\dot{x} = \boldsymbol{f} + \phi \boldsymbol{g}_1 + \boldsymbol{g}^2 v^2. \tag{7}$$

由题设(ii)可得

$$\phi^{(i)} = L_{f+\phi g_1}^{i} \phi,\ i = 1,\cdots,\delta - 1,$$

$$\phi^{(\delta)} = L_{f+\phi g_1}^{\delta} \phi + (L_{g^2} L_{f+\phi g_1}^{\delta-1} \phi) v^2.$$

注意到式(5),由(ii)知系统(7)可正则解耦. 于是系统(6)可(非正则)解耦.

必要性. 设在反馈 $v = \boldsymbol{\alpha}(x) + \boldsymbol{\beta}(x)w$ 下,系统(6)满足

$$y_i^{(l_i)} = w_i, l_i \geq n_{ie},\ i = 1,\cdots,p.$$

于是 $v_1 = \alpha_1(x)$. 此时系统(6)形为

$$\begin{cases} \dot{x} = \boldsymbol{f} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{g}_i + \sum_{i=2}^{m} \boldsymbol{g}_i' w_{i-1}, \\ y = \boldsymbol{h}(x). \end{cases} \tag{8}$$

易知 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_m\} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{g}_2', \cdots, \boldsymbol{g}_m'\} \overset{\mathrm{def}}{=} G$,及 $dw_k \notin \varepsilon_n$.

计算

$$\dot{y}_k = L_{f+\sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i} y_k + \sum_{i=2}^{m} (L_{g_i'} y_k) w_{i-1},$$

由 $\dot{y}_k = \dot{y}_k(x)$,知 $L_G y_k = 0$,由此可得

$$L_{f+\sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i} y_k = L_{f+\alpha_1 g_1} y_k.$$

类似地,由 $y_k^{(i)} = y_k^{(i)}(x)$, $i = 2, \cdots, l_k - 1$,可得

$$L_G L_{f+\alpha_1 g_1}^{i-1} y_k = 0, \qquad L_{f++\sum_{i=1}^m \alpha_i g_i}^i y_k = L_{f+\alpha_1 g_1}^i y_k, \qquad i = 2,\cdots,l_k - 1. \tag{9}$$

由 $y_k^{(l_k)} = w_k$ 知，

$$dL_G L_{f+\alpha_1 g_1}^{l_k-1} y_k = \mathrm{span}\{(0,\cdots,dw_k,\cdots,0)\}. \tag{10}$$

令 $\delta = l_k - r_k, \phi = \alpha_1$. 注意到

$$y_k^{(r_k)} = L_{f+\alpha_1 g_1}^{r_k} y_k = \alpha_1,$$

由关系式(9,10)容易得到本定理的结论(ii). 证毕.

定理 1 是对文献[1] Theorem 6 的修正. 可以看出，文献[1] Theorem 6 的 ii)蕴含定理 1 的条件(ii)，但反之不然. 但对线性系统，二者是等价的，因而文献[1]中 Theorem 6 对线性系统仍是成立的(参见文献[5]).

例 1. 考察系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, \dot{x}_3 = x_4 + u_1, \dot{x}_4 = x_5, \dot{x}_5 = x_6, \dot{x}_6 = u_3, \\ \dot{x}_7 = x_8, \dot{x}_8 = x_9 + x_2 x_7 + x_2 u_1, \dot{x}_9 = x_{10}, \dot{x}_{10} = u_4, \\ y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_3. \end{cases} \tag{11}$$

可以验证上述系统不满足文献[1] Theorem 6 的题设. 但简单的计算表明，$\delta = 4$，$\phi = x_7$ 是满足定理 1 的唯一的解，因此，该系统可解耦. 它的唯一的解耦反馈是

$$u_1 = - x_7, u_2 = w_2, u_3 = x_{10} + w_3, u_4 = - w_1. \tag{12}$$

可以看出，系统(11)在反馈变换(12)下的闭环系统的本性阶为{5,1,4}，大于原系统(11)的本性阶{4,1,4}.

参 考 文 献

1 Glumineau A, Moog C H. Nonlinear Morgan's problem: case of $(p+1)$ inputs and p outputs. *IEEE Trans. Autom. contol*, 1992, **37**:1067—1072

2 夏小华，高为炳. 非线性系统控制及解耦. 北京：科学出版社，1993

3 Di Benedetto M D, Grizzle J W, Moog C H. Rank invariants of nonlinear systems. *SIAM J. contr. Optimiz.*. 1989, **27**:658—672

4 Di Benedetto M D, Glumineau A, Moog C H. The nonlinear interactor and its application to input-output decoupling. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **39**:1246—1250

5 陈树中. Morgan 问题：输入数＝输出数＋1 情形. 自动化学报，1993, **19**:520—526

6 Herrera A N, Lafay J F. New results about Morgan's problem. *IEEETrans. Autom. Control*, 1993, **38**:1834—1838

SOME NOTES ABOUT NONLINEAR MORGAN'S PROBLEM

SUN ZHENDONG

(*7th Research Division, Beijing Univ. of Aero. & Astro.*, *Beijing* 100083)

Abstract For nonlinear Morgan's problem with one more inputs than outputs, Glumineau & Moog presented a constructive solution. This result was lately pointed out to be incorrect. In this paper, a modification of the Glumineau-Moog Theorem is given and a 10-dimensional system is also presented. This system has only one decoupling-feedback, and the essential orders of the decoupled closed-loop system are higher than those of the original system.

Key words Nonlinear control systems, morgan's problem, singh's algorithm, shifted systems

(上接第 287 页)