



# 三维模糊控制器的结构研究<sup>1)</sup>

刘向杰 柴天佑 张焕水

(东北大学自动化研究中心 沈阳 110006)

**摘要** 基于 Zadeh 的模糊逻辑推理和语言控制策略,进行了三维模糊控制器的结构研究.证明了具有线性控制规则的三维模糊控制器可等同于一个全局多层次线性关系式和一个局部非线性 PID 型控制器,由此剖析了模糊控制器的推理机制和其非线性本质.

**关键词** 三维模糊控制器,结构分析,隶属函数,PID 控制

## 1 引言

结构分析的方法近年来成为模糊控制理论发展的一个重要手段,文献[1,2]证明了具有线性控制规则的模糊控制器,同传统 PI 控制器间的内在等价性.近年来,三维模糊控制器以其优良的控制性能引起人们广泛关注,并逐渐在实践中获得应用<sup>[3,4]</sup>.本文将传统的结构分析方法推广应用到三维模糊控制器中,证明了具有线性规则的三维模糊控制器可等同于一个全局多层次关系式和一个局部非线性 PID 控制器.从而揭示了模糊控制器的实质机理.仿真结果表明了三维模糊控制器同 PID 控制器的内在联系和区别.

## 2 三维模糊控制器的推理过程

### 2.1 三维模糊控制器的基本构成

三维模糊控制器即在通常的模糊控制器基础上,输入增加了误差变化的变化率,本文称之为“加速率”.设  $T$  代表采样周期, $nT$  代表当前采样时间, $(n-1)T$  代表前一时刻的采样时间.于时刻  $nT$  量化输入为  $e^* = GE \cdot e(nT)$ ,  $r^* = GR \cdot r(nT)$ ,  $a^* = GA \cdot a(nT)$ ,

其中

$$\begin{aligned} e(nT) &= y(nT) - \text{setpoint}, & r(nT) &= |e(nT) - e(nT - T)|, \\ a(nT) &= r(nT) - r(nT - T), \end{aligned} \quad (1)$$

$e(nT)$ ,  $r(nT)$ ,  $a(nT)$  和  $y(nT)$  分别代表误差、误差变化率、误差变化的加速率和控制输

1) 国家自然科学基金资助.

收稿日期 1996-01-29

出,  $GE$ ,  $GR$  和  $GA$  为相应的量化因子.

为便于推理,假设相应于误差、误差变化率和误差变化的加速率的模糊集数量相同,隶属函数也完全一样,则每一输入变量模糊化后有  $J(J \geq 1)$  个“正”模糊子集,  $J$  个“负”模糊子集,1 个“零”模糊子集. 因此相应于每个输入变量总共有  $M = 2J + 1 \geq 3$  个模糊子集. 隶属函数  $\{\mu_{-J}(x), \mu_{-J+1}(x), \dots, \mu_0(x), \mu_1(x), \dots, \mu_J(x)\}$  采用通常的三角形状函数. (图 1)  $\lambda_i$  代表各子集的中心值. 若假设  $\lambda_{-J} = -L$ ,  $\lambda_0 = 0$  且  $\lambda_J = L$ , 则两相邻模糊子集间的距离  $S$  为:  $S = L/J$ , 因而  $\mu_i(x)$  的中心值为  $\lambda_i = i \cdot S$ . 图 1 显示的是由 9 个三角形隶属函数组成的模糊集. 且该种定义满足:  $\mu_i(x) + \mu_{i+1}(x) = 1$ .

对于输出量  $y(nT)$ , 存在  $6J + 1$  个模糊子集. 其中  $3J$  个为“正”输出量,  $3J$  个为“负”输出量, 1 个为“零”输出量. 设  $\gamma_i$  代表各模糊子集的中心值. 若  $\gamma_{-3J} = -H$ ,  $\gamma_0 = 0$ ,  $\gamma_{3J} = H$ , 则相邻两模糊子集中心值间的距离  $V$  为:  $V = H/3J = H/N - 1$ , 中心值可表示为  $\gamma_i = i \cdot V = i \cdot H/N - 1$ . 如同输入变量, 输出变量的隶属函数也对称于中心值, 且各子集的隶属函数形状相同.

模糊推理采用线性规则

$$\text{IF "error" is } E_i \text{ and "rate" is } R_j \text{, and "accelerate" is } A_k \text{ THEN "output" is } U_{-(i+j+k)}. \quad (2)$$

采用 Zadeh 的模糊逻辑合成, 可得控制输出量的隶属函数

$$\mu(i, j, k) = \min(\mu_i(e^*), \mu_j(r^*), \mu_k(a^*)). \quad (3)$$

鉴于输出量的隶属函数对称于其中心值, 模糊规则结论部分的表达式为

$$v(i, j, k) = \mu(i, j, k) \cdot \gamma_{-(i+j+k)} = -\min(\mu_i(e^*), \mu_j(r^*), \mu_k(a^*)) \cdot (i + j + k)V, \quad (4)$$

其中  $v(i, j, k)$  为由模糊控制规则(2)定义的输出量的增量.

模糊判决采用非线性的加权平均判决法(CAM), 控制输出增量  $GU \cdot \Delta u(nT)$  为

$$GU \cdot \Delta u(nT) = GU \frac{\sum_{\mu(i,j,k) \neq 0} v(i, j, k)}{\sum_{\mu(i,j,k) \neq 0} \mu(i, j, k)}. \quad (5)$$

### 2.2 三维模糊控制器的结构分析

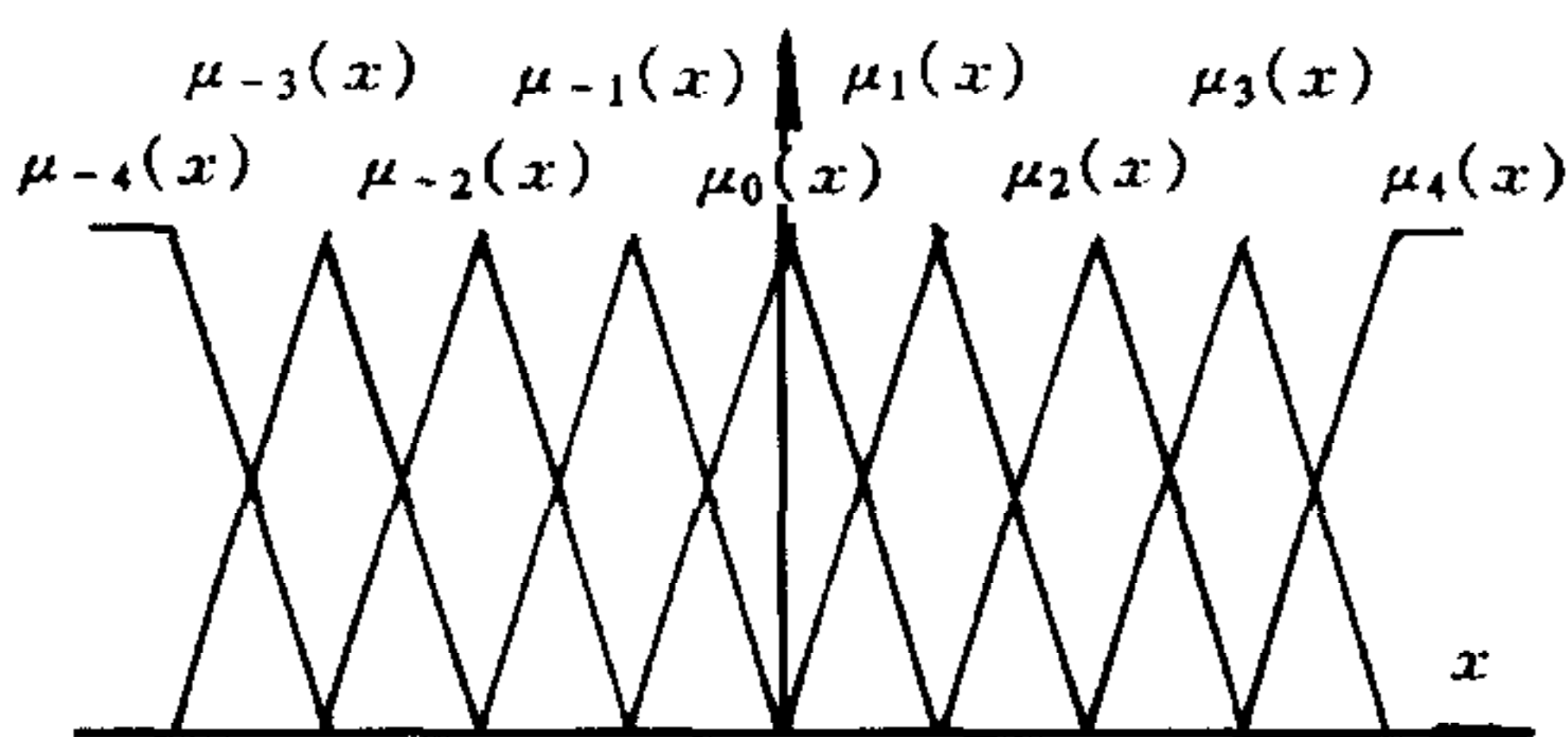


图 1 三角形的隶属函数

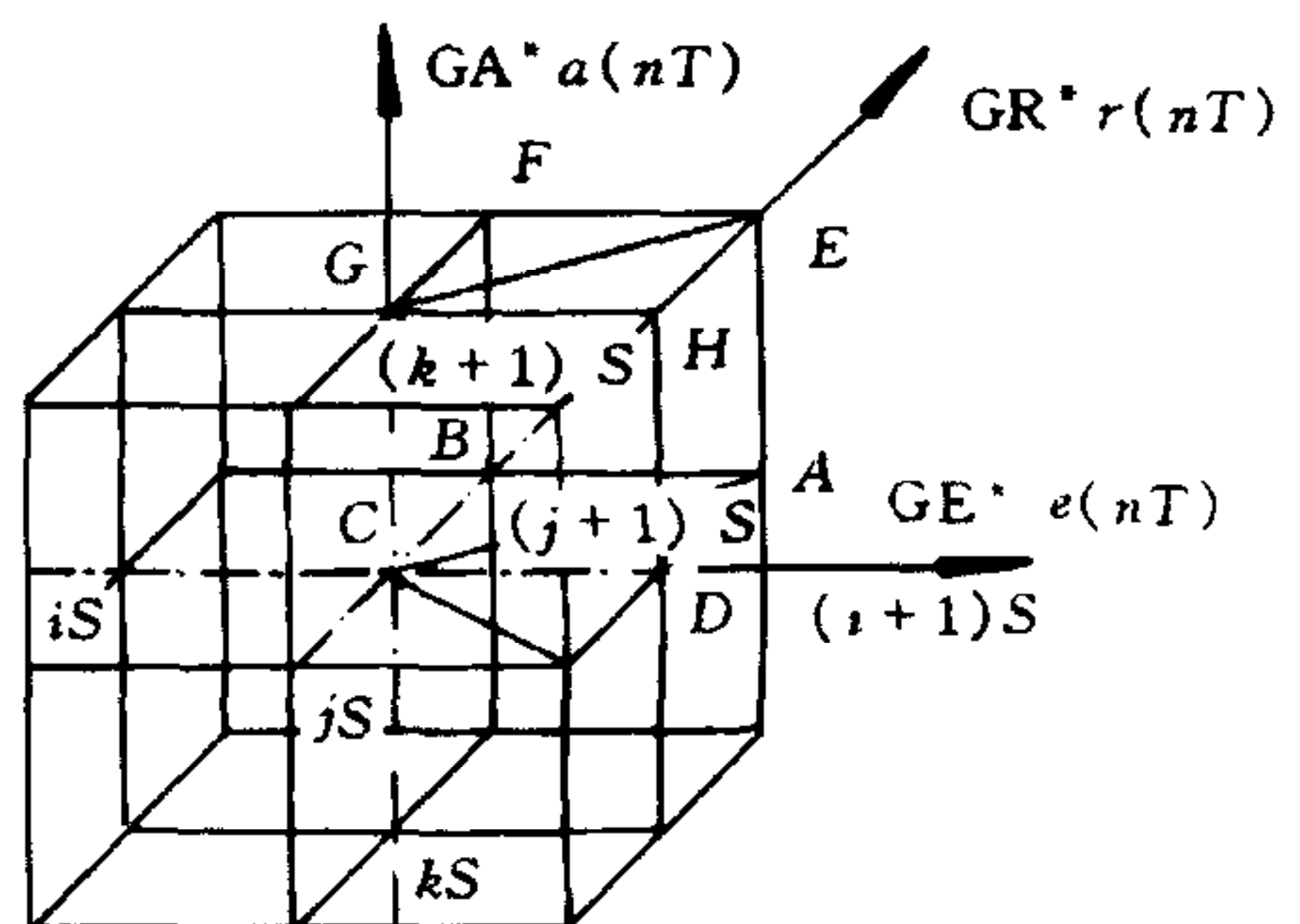


图 2 三维输入变量构成一个立体空间

不失一般性, 考虑如下区域

$$iS \leq GE \cdot e(nT) \leq (i+1)S, \quad jS \leq GR \cdot r(nT) \leq (j+1)S,$$

$$kS \leq GA \cdot a(nT) \leq (k+1)S, \tag{6}$$

其中  $-J \leq i, j, k \leq J-1$ . 由图 1, 输入变量  $e^*, r^*, a^*$  的隶属函数可由下式获得:

$$\mu_i(e) = [(i+1)S - GE \cdot e(nT)]/S, \quad \mu_{i+1}(e) = [GE \cdot e(nT) - iS]/S, \tag{7}$$

$$\mu_j(r) = [(j+1)S - GR \cdot r(nT)]/S, \quad \mu_{j+1}(r) = [GR \cdot r(nT) - jS]/S, \tag{8}$$

$$\mu_k(a) = [(k+1)S - GA \cdot a(nT)]/S, \quad \mu_{k+1}(a) = [GA \cdot a(nT) - kS]/S, \tag{9}$$

由(2)模糊推理采用八条线性规则

(r1) IF "error" is  $E_{i+1}$  and "rate" is  $R_{j+1}$  and "accelerate" is  $A_{k+1}$  THEN "output" is  $U_{-(i+j+k+3)}$ ;  
 $\vdots$

(r8) IF "error" is  $E_i$  and "rate" is  $R_j$  and "accelerate" is  $A_k$  THEN "output" is  $U_{-(i+j+k)}$ .  
 论域  $[iS, (i+1)S]$ ,  $[jS, (j+1)S]$ ,  $[kS, (k+1)S]$  在空间构成一个立方体. 在空间 8 个象限内可将立方体分为 48 个区域(每个象限 6 个区域). 在不同区域  $\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_j, \mu_{j+1}$  和  $\mu_k, \mu_{k+1}$  的大小关系不同. 以 I 象限为例由式(3)实行合成运算结果列于表 1.

表 1 由式(2)实行合成运算的结果

区域	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$r_6$	$r_7$	$r_8$
EHCG	$\mu_{j+1}(r^*)$	$\mu_k(a^*)$	$\mu_j(r^*)$	$\mu_k(a^*)$	$\mu_i(e^*)$	$\mu_k(a^*)$	$\mu_i(e^*)$	$\mu_k(a^*)$
EHCD	$\mu_{j+1}(r^*)$	$\mu_k(a^*)$	$\mu_j(r^*)$	$\mu_k(a^*)$	$\mu_i(e^*)$	$\mu_i(e^*)$	$\mu_i(e^*)$	$\mu_i(e^*)$
EACD	$\mu_{k+1}(a^*)$	$\mu_k(a^*)$	$\mu_j(r^*)$	$\mu_j(r^*)$	$\mu_i(e^*)$	$\mu_i(e^*)$	$\mu_i(e^*)$	$\mu_i(e^*)$
CBAE	$\mu_{k+1}(a^*)$	$\mu_k(a^*)$	$\mu_j(r^*)$	$\mu_j(r^*)$	$\mu_i(e^*)$	$\mu_i(e^*)$	$\mu_j(r^*)$	$\mu_j(r^*)$
CGEF	$\mu_{i+1}(e^*)$	$\mu_k(a^*)$	$\mu_j(r^*)$	$\mu_k(a^*)$	$\mu_i(e^*)$	$\mu_k(a^*)$	$\mu_j(r^*)$	$\mu_k(a^*)$
CBEF	$\mu_{i+1}(e^*)$	$\mu_k(a^*)$	$\mu_j(r^*)$	$\mu_j(r^*)$	$\mu_i(e^*)$	$\mu_k(a^*)$	$\mu_j(r^*)$	$\mu_j(r^*)$

应用式(7,8,9), 将表 1 的结果代入模糊判决算式(5), 可得到输出  $GU \cdot \Delta u(nT)$ .

区域 EHCG

$$GU \cdot \Delta u(nT) = -(i+j+k+1.5) \frac{GU \cdot H}{N-1} - \frac{[GR \cdot r(nT) - (j+0.5)S] + 2[GA \cdot a(nT) - (k+0.5)S]}{[4(k+1) + 2(i+1) + 1]S - 2[GE \cdot e(nT) + 2GA \cdot a(nT)]} \frac{GU \cdot H}{N-1}, \tag{10}$$

区域 EHCD

$$GU \cdot \Delta u(nT) = -(i+j+k+1.5) \frac{GU \cdot H}{N-1} - \frac{[GR \cdot r(nT) - (j+0.5)S] + 2[GE \cdot e(nT) - (i+0.5)S]}{[4(i+1) + 2(k+1) + 1]S - 2[GA \cdot a(nT) + 2GE \cdot e(nT)]} \frac{GU \cdot H}{N-1} \tag{11}$$

等 48 式.

$GU \cdot \Delta u(nT)$  由两部分组成. 第一部分, 是一个以  $i, j$  和  $k$  为自变量的三维多层次关系式, 可重写为

$$-(i+j+k+1.5) \frac{GU \cdot H}{N-1} = -[(i+0.5)S + (j+0.5)S + (k+0.5)S] \frac{GU \cdot H}{N-1}.$$

由于点  $((i+0.5)S, (j+0.5)S, (k+0.5)S)$  是图 2 所示空间立方体的中心, 控制策

略取决于其在整个量化空间的绝对位置. 它是一个“全局的”多层次关系式.

$GU \cdot \Delta u(nT)$ 的第二部分为一个非线性非模糊控制器,它的大小取决于目前量化输入值相对于立方体中心点的位置,它是“局域”非线性控制器.

由公式(10,11)的组成形式,不难看出它是PID型控制器. 一个满足输入量  $e(nT)$ ,  $r(nT)$ ,  $a(nT)$  达到稳定状态  $((i+0.5)S/GE, (j+0.5)S/GR, (k+0.5)S/GA)$  而输出为零的离散形式PID控制器可表示为

$$\begin{aligned} \delta u_{PID}(i, j, k) &= -(K_I[GE \cdot e(nT) - (i+0.5)S] + K_P[GR \cdot r(nT) - (j+0.5)S] \\ &\quad + K_D[GA \cdot a(nT) - (k+0.5)S]), \end{aligned} \tag{12}$$

其中  $K_I, K_P$  和  $K_D$  分别为积分、比例和微分系数. (12)式与公式(10,11)比较,可得局域非线性控制器相应于PID的积分、比例和微分系数随输入状态变化关系如表2

表2 三维模糊控制器等同于非线性PID控制器的因子

$K_I(e^*, r^*, a^*)$	$K_P(e^*, r^*, a^*)$	$K_D(e^*, r^*, a^*)$	
0	$\frac{GU \cdot H/(N-1)}{[4(k+1)+2(i+1)+1]S-2[e^*+2a^*]}$	$\frac{2GU \cdot H/(N-1)}{[4(k+1)+2(i+1)+1]S-2[e^*+2a^*]}$	EHCG
$\frac{2GU \cdot H/(N-1)}{[4(i+1)+2(k+1)+1]S-2[a^*+2e^*]}$	$\frac{GU \cdot H/(N-1)}{[4(i+1)+2(k+1)+1]S-2[a^*+2e^*]}$	0	EHCD
$\frac{2GU \cdot H/(N-1)}{[4(i+1)+2(j+1)+1]S-2[r^*+2e^*]}$	0	$\frac{GU \cdot H/(N-1)}{[4(i+1)+2(j+1)+1]S-2[r^*+2e^*]}$	EACD
0	$\frac{2GU \cdot H/(N-1)}{[4(j+1)+2(i+1)+1]S-2[e^*+2r^*]}$	$\frac{GU \cdot H/(N-1)}{[4(j+1)+2(i+1)+1]S-2[e^*+2r^*]}$	CBAE
$\frac{GU \cdot H/(N-1)}{[4(k+1)+2(j+1)+1]S-2[r^*+2a^*]}$	0	$\frac{2GU \cdot H/(N-1)}{[4(k+1)+2(j+1)+1]S-2[r^*+2a^*]}$	CGEF
$\frac{GU \cdot H/(N-1)}{[4(j+1)+2(k+1)+1]S-2[a^*+2r^*]}$	$\frac{2GU \cdot H/(N-1)}{[4(j+1)+2(k+1)+1]S-2[a^*+2r^*]}$	0	CBFE

当变量  $e^*, r^*, a^*$  分别选择于边界值  $iS, (i+1)S, jS, (j+1)S$  和  $kS, (k+1)S$  时,参数  $K_I(e^*, r^*, a^*), K_P(e^*, r^*, a^*)$  和  $K_D(e^*, r^*, a^*)$  达到静态值.

### 3 仿真结果

模糊控制器的结构采用最简单的形式,即  $M=3$ ,共有27条模糊规则. PID控制器参数  $K_I, K_P$ , 和  $K_D$  的选择同三维模糊控制器的  $K_I(e^*, r^*, a^*), K_P(e^*, r^*, a^*)$  和  $K_D(e^*, r^*, a^*)$  的静态值相同.

图3-a显示对于线性一阶小迟后系统  $Y(s)/U(s) = K1 \cdot e^{-Ls}/(TA \cdot s + 1)$ ,三维模糊

控制器同 PID 控制器的控制性能比较, 仿真结果显示对于线性一阶小迟后系统三维模糊控制器同 PID 控制器的控制效果无明显差别. ( $T=0.25$  表示采样周期, 系统于  $t=75$  秒时受到  $rd=50$  的扰动)

图 3-b 中被控对象变为非线性大迟后环节  $y(k+1) = 0.5y(k) + e^{\left|\frac{y(k)-R}{R}\right|} u(k-L/T)$ , PID 控制器难以对其实行稳定控制, 而模糊控制器可以稳定运行. 且三维模糊控制器的控制效果优于二维模糊控制器. ( $L=6, T=0.25, R=100$ )

仿真图中, @ 代表系统对给定阶跃响应的超调量, TFUZZY 代表模糊控制器的稳定时间, @' 代表系统对扰动的超调量, TPID 代表 PID 控制器的稳定时间.

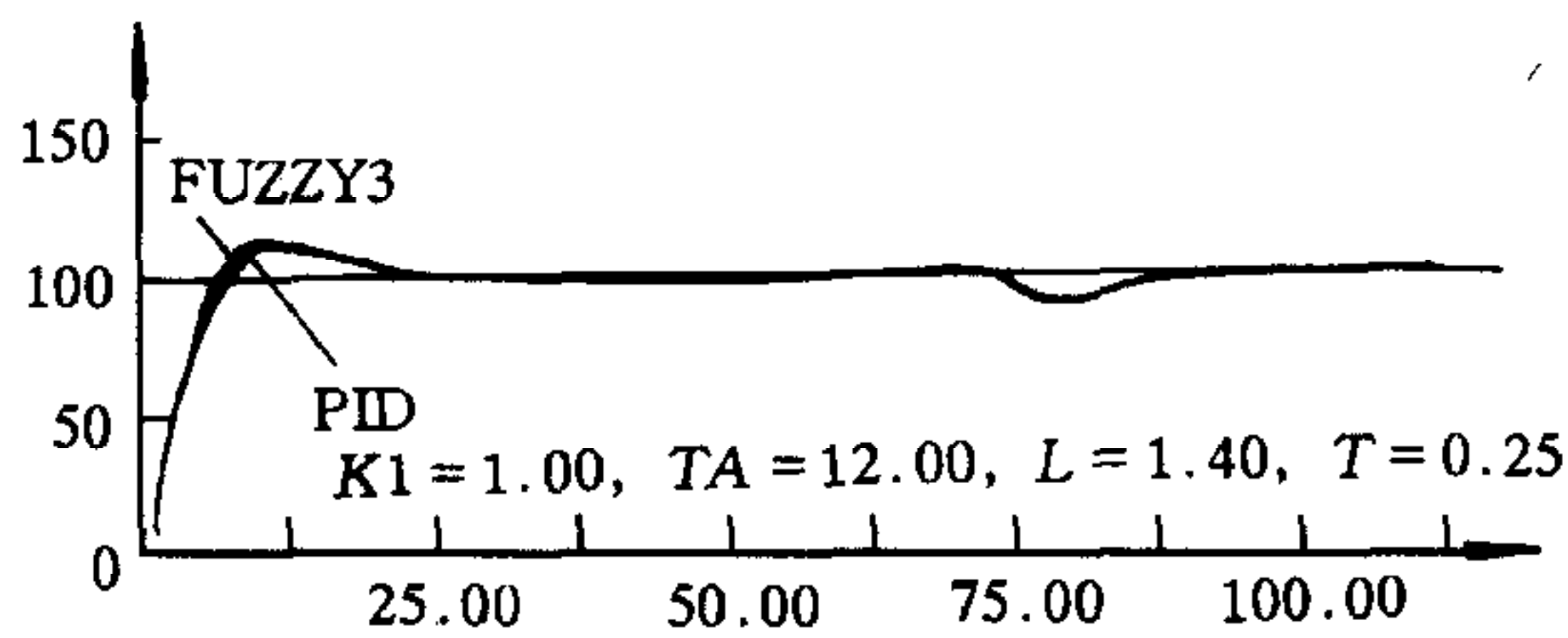


图 3-a 对于线性一阶小迟后系统

注. @PID=12.22, TPID=24.00.

@FUZZY3=13.52, TFUZZY3=22.75

@'PID=9.78, T'PID=15.75.

@'FUZZY3=10.09, T'FUZZY3=15.00

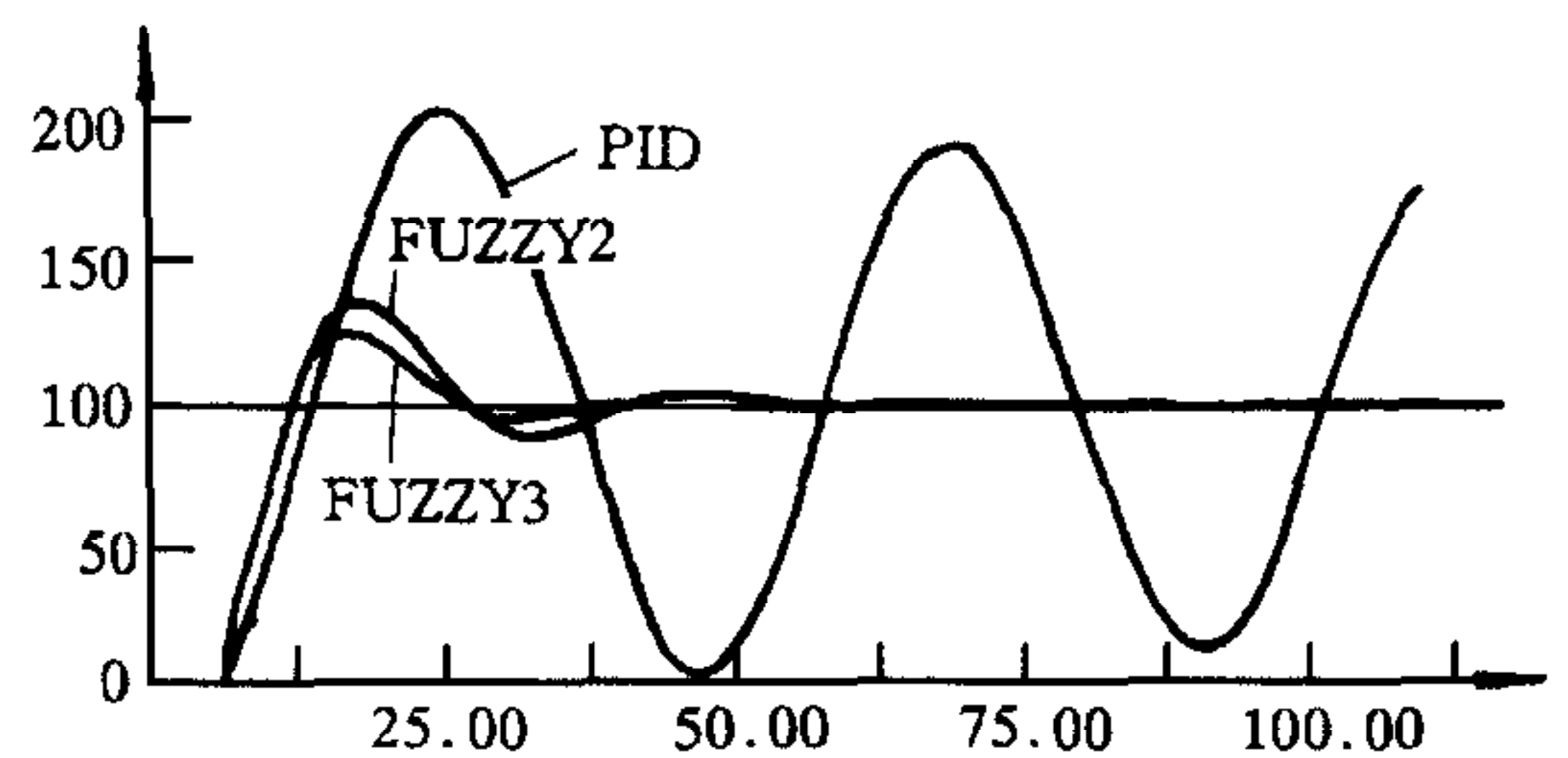


图 3-b 被控对象为非线性大迟后系统

注. @FUZZY3=25.12, TFUZZY3=37.00;

@FUZZY2=35.46, TFUZZY2=52.50

图 3 三维模糊控制器与 PID 控制器性能比较

## 4 结论

运用结构分析的方法, 可以基于模糊控制的推理机制揭示模糊控制器工作的实质. 该方法建立了模糊控制同常规控制策略之间的内在的联系, 从而可以用常规的控制理论发展模糊控制理论. 本文结果表明三维模糊控制器实际上是一个变结构的自适应 PID 控制器. 模糊控制器的鲁棒性存在于它的非线性本质和变结构特性.

## 参 考 文 献

- 1 Ying H, Siler W, Buckley J J. Fuzzy control theory: a nonlinear case. *Automatica*, 1990, **26**:513-520
- 2 Ying H. A nonlinear fuzzy controller with linear control rules is the sum of a global two-dimensional multilevel relay and a local nonlinear proportional-integral controller. *Automatica*, 1993, **29**:499-503
- 3 Li Shiyong, Hu Hengzhang. Design and study of a class three-dimensional fuzzy controller, In: Proc. of International symposium on fuzzy systems and knowledge engineering, 1987, **2**:477-448
- 4 范晓英, 陆培新, 陈文楷. 一种新型的模糊控制器. 控制理论与应用, 1995, **12**(5):579-602

## STRUCTURE ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL FUZZY CONTROLLER

LIU XIANGJIE    ZHANG HUANSHUI    CHAI TIANYOU

*(Research Center of Automation, Northeastern University, Shenyang, 110006)*

**Abstract** Based on Zadeh's linguistic control strategy and inference process, this paper presents an approach to the structure analysis of three-dimensional fuzzy controller. The authors analytically prove that a typical three-dimensional fuzzy controller with linear control rules is the sum of a global nonlinear controller and a local nonlinear PID-like controller. In such a way, the reasoning mechanism of three-dimensional fuzzy controller is presented and the non-linear essence of it disclosed.

**Key words** three-dimensional fuzzy controller, structure analysis, membership function, PID control