第 24 卷 第 2 期
1998 年 3 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 24, No. 2
March., 1998

短 文

基于模糊状态模型的连续系统控制器设计和稳定性分析[1)]

孙增圻

（清华大学计算机系　北京　100084）

摘　要　首先给出连续系统模糊状态模型的表示方法，在此基础上给出了一种模糊状态反馈控制器的设计方法，对其稳定性进行了分析，得出了一个确保系统全局稳定的充分条件. 同时也提出一种模糊观测器的设计方法，并对其收敛性进行分析，得出了确保收敛的一个充分条件.

关键词　模糊状态模型，模糊控制器，模糊观测器，李雅普诺夫稳定性

1　引言

模糊控制方法已被广泛地应用于许多实际问题，但它缺乏严格的理论分析. 常规的线性控制理论已经很成熟，但适用范围受到很大局限. 本文试图将两者结合，提出一种新的模糊控制的设计方法. 其基本思想是将整个状态空间分割为多个模糊子空间，在每个模糊子空间中建立局部的线性模型，并对局部的线性模型设计各自的线性控制器，使整个系统的控制变为局部控制的加权组合.

Takagi 和 Sugeno 给出了一种模糊模型表示[1]，其后件不是简单的模糊语言值，而是输入量的线性组合，通常称之为 T-S 模型. 本文给出的模糊状态模型可以看成是 T-S 模型的推广.

Tanaka 和 Sugeno 在 T-S 模型的基础上对模糊系统的稳定性进行了分析[2]，但未给出模糊控制器的设计方法. Feng 和 Cao 基于模糊动态模型，给出了一种模糊控制器的设计方法[3,4]，取整个系统的控制为起主导作用的局部模糊子系统的控制，因而控制输出可能是不连续的，进而可能导致系统输出的不平滑. Tanaka 在文献[5]中针对离散系统给出了一种模糊控制器，它是各局部控制的加权组合，并给出了判断整个系统全局稳定的一个充分条件.

本文则是针对连续系统给出模糊状态模型的表示方法，给出一种状态反馈控制器的设计方法，并对其稳定性进行了分析，给出了确保系统全局稳定的一个充分条件. 同时还

---

1) 国家自然科学基金资助项目.

收到日期　1996-04-05

提出了一种模糊观测器的设计方法,并对其收敛性进行了分析,给出了确保收敛的一个充分条件.

2　模糊状态模型表示

对于连续控制对象,其模糊状态方程模型可表示为

R_p^i:若 $x_1(t)$是 M_1^i and … and $x_n(t)$是 M_n^i,则

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_i\boldsymbol{x}(t) + B_i\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{y}(t) = C_i\boldsymbol{x}(t) + D_i\boldsymbol{u}(t), \end{cases} \tag{1}$$

$i=1,2,\cdots,l$,R_p^i 表示控制对象的第 i 条模糊规则. 其中 $M_j^i(j=1,2,\cdots,n)$是模糊集合. $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$,$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$, $\boldsymbol{y}(t)\in R^r$, $A_i\in R^{n\times n}$, $B_i\in R^{n\times m}$, $C_i\in R^{r\times n}$,$D_i\in R^{r\times m}$.

若定义 $M^i=M_1^i\times\cdots\times M_n^i$,则上述的模糊模型可以表示为如下简洁的形式:

R_p^i:若 $\boldsymbol{x}(t)$是 M^i,则

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_i\boldsymbol{x}(t) + B_i\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{y}(t) = C_i\boldsymbol{x}(t) + D_i\boldsymbol{u}(t). \end{cases} \tag{2}$$

若设 $M_j^i(x_j)$表示 x_j 属于 M_j^i 的隶属度函数,直积运算采用求积法,则

$$M^i(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{n} M_j^i(x_j). \tag{3}$$

若模糊化采用单点模糊集合,清晰化采用加权平均法[6],则可得整个系统状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t), \tag{5}$$

其中

$$A = \sum_{i=1}^{l}\mu_i(\boldsymbol{x})A_i,\quad B = \sum_{i=1}^{l}\mu_i(\boldsymbol{x})B_i,\quad C = \sum_{i=1}^{l}\mu_i(\boldsymbol{x})C_i,\quad D = \sum_{i=1}^{l}\mu_i(\boldsymbol{x})D_i, \tag{6}$$

$$\mu_i(\boldsymbol{x}) = M^i(\boldsymbol{x})/\sum_{j=1}^{l}M^j(\boldsymbol{x}), \tag{7}$$

并假设

$$M^i(\boldsymbol{x}) \geq 0,\quad \sum_{j=1}^{l}M^j(\boldsymbol{x}) > 0, \tag{8}$$

因此有

$$0 \leq \mu_i(\boldsymbol{x}) \leq 1,\quad \sum_{i=1}^{l}\mu_i(\boldsymbol{x}) = 1. \tag{9}$$

该模糊建模方法的本质在于:一个整体非线性的动力学模型可以看成是许多个局部线性模型的模糊逼近.

3　模糊控制器的设计

考虑对于每一个线性子系统首先设计一个局部的线性状态反馈控制器. 例如,可以采用极点配置设计方法,或线性二次型最优控制的设计方法,来设计这样的状态反馈控制器. 因此模糊控制器可以表示为如下的模糊模型:

R_c^i:若 $\boldsymbol{x}(t)$是 M^i,则

$$\boldsymbol{u}(t) = - L_i \boldsymbol{x}(t), \tag{10}$$

$i=1,2,\cdots,l$. 整个系统的控制为各个子系统局部反馈控制的加权和,即

$$\boldsymbol{u}(t) = - L\boldsymbol{x}(t), \tag{11}$$

$$L = \sum_{i=1}^{l} \mu_i(\boldsymbol{x}) L_i, \tag{12}$$

结合式(4),(11),(12)可得整个系统的模糊模型为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} \mu_{ij}(\boldsymbol{x}) H_{ij}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{x}(k), \tag{13}$$

其中

$$\mu_{ij} = \frac{M^i(x)M^j(x)}{\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} M^i(x)M^j(x)}, \quad H_{ij} = A_i - B_i L_j. \tag{14}$$

定理 1. 对于如式(13)所示的系统,如果存在一个共同的正定矩阵 P,使得

$$H_{ij}^{\mathrm{T}}P + PH_{ij} < 0, \quad i = 1,2,\cdots,l;\ j = 1,2,\cdots,l \tag{15}$$

则整个系统是全局渐近稳定的.

证明. 选取李雅普诺夫函数为

$$V = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{x}(t). \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}[\boldsymbol{x}(t)] &= \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\Big[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}\mu_{ij}(\boldsymbol{x})H_{ij}^{\mathrm{T}}P + P\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}\mu_{ij}(\boldsymbol{x})H_{ij}\Big]\boldsymbol{x}(t) \\ &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\Big[\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}\mu_{ij}(\boldsymbol{x})(H_{ij}^{\mathrm{T}}P + PH_{ij})\Big]\boldsymbol{x}(t) < 0, \end{aligned} \tag{17}$$

从而说明系统是全局渐近稳定的.

定理 1 给出了判断系统稳定性的一充分条件. 下面的定理给出了存在共同的正定矩阵 P 的一个必要条件.

定理 2. 对于(14)所示的系统,如果 H_{ij}均为非奇异且存在一个共同的正定矩阵 P,使式(15)成立,则$\forall\ i,j,k,l,t,s,\cdots \in (1,2,\cdots,l)$,$H_{ij}$,$H_{ij}+H_{kl}$,$H_{ij}+H_{kl}+H_{ts}$,…均为稳定阵(稳定阵是指它的特征值均在左半平面).

证明. 若式(15)成立,则$\forall\ i,j$,一定存在正定阵 Q_{ij},使得

$$H_{ij}^{\mathrm{T}}P + PH_{ij} + Q_{ij} = 0, \tag{18}$$

也即说明 H_{ij}为稳定阵.

根据定理条件,$\forall\ i,j,k,l$ 有

$$H_{ij}^{\mathrm{T}}P + PH_{ij} < 0, \tag{19}$$

$$H_{kl}^{\mathrm{T}}P + PH_{kl} < 0. \tag{20}$$

将以上两式相加得

$$(H_{ij} + H_{kl})^{\mathrm{T}}P + P(H_{ij} + H_{kl}) < 0, \tag{21}$$

即$\forall\ i,j,k,l$,$H_{ij}+H_{kl}$均为稳定阵. 同样可证得 $H_{ij}+H_{kl}+H_{ts}$,…也均为稳定阵,从而定理得证.

4 模糊观测器的设计

若控制对象的模糊模型仍同前，模糊观测器可表示为：

R_o^i：若 $\boldsymbol{x}(t)$ 是 M^i，则

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = A_i\hat{\boldsymbol{x}}(t) + B_i\boldsymbol{u}(t) + K_i[\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t)], \tag{22}$$

$i=1,2,\cdots,l$. 其中 R_o^i 表示模糊观测器的第 i 条规则，$\boldsymbol{y}(t)$ 是系统的实际输出，即

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{i=1}^{l}\mu_i C_i\boldsymbol{x}(t) + \sum_{i=1}^{l}\mu_i D_i\boldsymbol{u}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t), \tag{23}$$

$\hat{y}(t)$ 是系统的估计输出，即

$$\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \sum_{i=1}^{l}\mu_i C_i\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \sum_{i=1}^{l}\mu_i D_i\boldsymbol{u}(t) = C\hat{\boldsymbol{x}}(t) + D\boldsymbol{u}(t), \tag{24}$$

K_i 是根据局部模糊子系统(A_i,C_i)所设计的观测器增益矩阵.

采用如前所述的典型模糊推理方法，可得整个系统的观测器方程为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = A\hat{\boldsymbol{x}}(t) + C\boldsymbol{u}(t) + K[\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t)], \tag{25}$$

其中

$$K = \sum_{i=1}^{l}\mu_i K_i, \tag{26}$$

是整个系统的观测器增益矩阵.

将观测器方程与控制对象方程相比较，求出状态估计误差方程为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t) = (A - KC)\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}\mu_{ij}(\boldsymbol{x})S_{ij}\tilde{\boldsymbol{x}}(t), \tag{27}$$

其中

$$\mu_{ij} = \frac{M^i(\boldsymbol{x})M^j(\boldsymbol{x})}{\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}M^i(\boldsymbol{x})M^j(\boldsymbol{x})}, \quad S_{ij} = A_i - K_iC_j. \tag{28}$$

定理 3. 对于(27)所示的系统，如果存在一个共同的正定矩阵 P，使得

$$S_{ij}^{\mathrm{T}}P + PS_{ij} < 0, \quad i = 1,2,\cdots,l;\ j = 1,2,\cdots,l, \tag{29}$$

则该系统是全局渐近稳定的.

证明同定理 1.

定理 4. 对于式(27)所示的系统，如果 S_{ij} 均为非奇异且存在一个共同正定矩阵 P，使式(29)成立，则$\forall\ i,j,k,l,t,s,\cdots\in(1,2,\cdots,l)$，$S_{ij}, S_{ij}+S_{kl}, S_{ij}+S_{kl}+S_{ts},\cdots$均为稳定阵.

证明同定理 2.

5 结束语

模糊状态模型将模糊思想与线性模型的表示方法相结合，它为非线性系统的建模提供了新的方法.

模糊控制器将模糊的思想与线性控制器的设计方法相结合. 整个系统控制是各子系

统局部线性反馈的加权和. 所述的方法为非线性系统的控制提供了一种新的设计方法.

模糊观测器是将模糊的思想与线性观测器的设计方法相结合. 总的观测器增益是各子系统观测器增益的加权和，这种方法为非线性系统的观测器设计提供了一条新的途径.

参 考 文 献

1 Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 1985, **15**(1): 116－132

2 Takagi T, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, **45**(2): 135－156

3 Feng G, Cao S G *et al.* Design of fuzzy control systems with guaranteed stability. *Fuzzy Sets and Systems* (to appear)

4 Cao S G, Rees N W *et al.* Analysis and design of complex control systems-heterogenous model methods. *Austratian Journal of Intelligent Information Processing Systens*, 1995, **2**(3): 56－63

5 Tanaka K. Stability and stabilizability of fuzzy-neural-linear control systems, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 1995, **3**(4): 438－447

6 Lee C C. Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 1990, **20**(2): 404－435

CONTROLLER DESIGN AND STABILITY ANALYSIS OF TIME－CONTINUOUS SYSTEMS BASED ON A FUZZY STATE MODEL

SUN ZENGQI

(*Dept. of Computer*, *Tsinghua Univ.*, *Beijing* 100084)

Abstract A fuzzy state model for time－continuous systems is presented. Based on the model a controller design method with fuzzy state feedback is given. The stability of the fuzzy systems is analyzed. A design method for fuzzy observers is aslo given. A sufficient condition which guarantees the convergence of the estimated states to the real states is obtained.

Key words Fuzzy state model, fuzzy cotroller, fuzzy observer, Lyapunov stability