第 24 卷 第 2 期
1998 年 3 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 24, No. 2
March., 1998

短 文

广义系统的渐近稳定性与镇定[1)]

张庆灵 戴冠中
(西北工业大学 西安 710072)

JAMES LAM LI QIAN ZHANG
(*The University of Hong Kong*)
M. DE LA SEN
(*University Del Pais Vasco, Spain*)

摘 要 利用 Lyapunov 方法研究广义系统的渐近稳定性及相关的镇定问题. 得到了渐近稳定的条件及镇定方法.

关键词 广义系统，稳定性，Lyapunov 方法

1 引言

由于广义系统通常含有脉冲行为，致使传统的 Lyapunov 方法不能直接用于这类系统的稳定性分析中，从而也导致了一些控制问题在处理上的困难. 例如，受扰动广义系统的镇定问题，目前还没有成熟的方法去解决[1].

这里将给出适合于广义系统稳定性分析的 Lyapunov 方法. 引入相应的 Lyapunov 方程和 Riccati 方程，讨论广义系统的渐近稳定性判别及镇定问题. 得到了渐近稳定的充要条件及镇定方法.

2 渐近稳定性分析

考虑如下的正则广义系统

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

其中 $x\in R^n$，$u\in R^m$，分别为状态和输入；$E\in R^{n\times n}$，$A\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times m}$. 有时简记广义系统(1)为(E,A,B). 可设：$EA=AE$；存在实数 s_0 使 $s_0E-I=A$. 否则，由正则性知，可用$(s_0E-A)^{-1}$左乘式(1)，所得系统具有上述性质，并与原系统稳定性一致.

对于矩阵 E，存在可逆矩阵 T 使

---

1) 中国博士后科学基金、国家自然科学基金和辽宁省科学技术基金资助.
收稿日期 1995-06-23

$$[TET^{-1}\quad TAT^{-1}] = \{\mathrm{diag}[E_1\ E_2]\quad \mathrm{diag}[A_1\ A_2]\}$$

其中 E_1 满秩；E_2 为幂零阵，有 $E_2^h\neq 0$，$E_2^{h+1}=0$；h 为非负整数. $A_1=s_0E_1-I_1$，$A_2=s_0E_2-I_2$. 再记 $B^TT^T=[B_1^T\ B_2^T]$. 系统(1)受限等价于

$$E_1\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u, \tag{2a}$$

$$E_2\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u, \tag{2b}$$

其中 $x^T=[x_1^T\quad x_2^T]T^{-T}$. 由此不难证明

引理 1. 广义系统(1)渐近稳定等价于慢子系统(2a)渐近稳定.

引理 2. $x_1\neq 0$ 等价于 $E^{h+1}x\neq 0$.

因此，广义系统(1)的 Lyapunov 函数构造为

$$V(E^{h+1}x) = x^T(E^{h+1})^T VE^{h+1}x \ , \tag{3}$$

其中 $V>0$，$V\in R^{n\times n}$. 有：$E^{h+1}x\neq 0$ 时，$V(E^{h+1}x)>0$；$E^{h+1}x=0$ 时，$V(0)=0$.

利用式(1)，(2) 以及 $EA=AE$，得到

$$(E^h)^TA^TVE^{h+1} + (E^{h+1})^TVAE^h = -(E^{h+1})^T WE^{h+1}, \tag{4}$$

其中 $W>0$，$W\in R^{n\times n}$. 将式(4)称为广义系统(1)的 Lyapunov 方程.

当式(4)中矩阵不加限制时，类似于文献[2]中引理 2 的证法，可以证明

命题 1. Lyapunov 方程(4)对于任给的 W 有解 V，等价于它对任给的 $W=W^H$ 有解 $V=V^H$.

这一结论也等价于

$$\begin{aligned}&\mathrm{rank}[(E^h)^TA^T\otimes(E^{h+1})^T + (E^{h+1})^T\otimes(E^h)^TA^T\quad (E^{h+1})^T\otimes(E^{h+1})^T]\\ &\qquad = \mathrm{rank}[(E^h)^TA^T\otimes(E^{h+1})^T + (E^{h+1})^T\otimes(E^h)^TA^T],\end{aligned} \tag{5}$$

其中“$\otimes$”表示矩阵的 kronecker 积.

记 $\deg\det(sE-A)=\mathrm{rank}E_1=r$.

定理 1. 广义系统(1)渐近稳定的充要条件是 Lyapunov 方程(4)对于任给的 $W>0$ 有正惯性指数为 r 的解 $V\geqslant 0$.

证明. 必要性. 令式(2)中 $u\equiv 0$ 后代入式(4)得到

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}(E_1^h)^T & 0\\ 0 & (E_2^h)^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1^T & 0\\ 0 & A_2^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1 & V_2\\ V_2^T & V_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_1^{h+1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\ &+\begin{bmatrix}(E_1^{h+1})^T & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1 & V_2\\ V_2^T & V_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_1^h & 0\\ 0 & E_2^h\end{bmatrix}\\ &=-\begin{bmatrix}(E_1^{h+1})^T & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_1 & W_2\\ W_2^T & W_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_1^{h+1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{6}$$

整理并注意到 E_1 满秩，得到它的等价形式为

$$A_1^TV_1E_1 + E_1^TV_1A_1 = -E_1^TW_1E_1, \tag{7a}$$

$$V_2A_2E_2^h = 0, \tag{7b}$$

其中

$$T^TVT^{-1} = \begin{bmatrix}V_1 & V_2\\ V_2^T & V_3\end{bmatrix},\ T^TWT^{-1} = \begin{bmatrix}W_1 & W_2\\ W_2^T & W_3\end{bmatrix}.$$

由(E,A)渐近稳定知(E_1,A_1)渐近稳定. 当 $W>0$ 时有 $W_1>0$. 则式(7a)有解 $V_1>0$，正

惯性指数为 r. 取 $V_2=0$，$V_3=0$. 则必要性得证.

充分性. 注意到 $W>0$ 时 $W_1>0$；式(4)有解 V 等价于式(7a)，(7b)分别有解 V_1,V_2 此时有 $V_1>0$. 从而得知(E_1, A_1)渐近稳定. 则由引理 1 得证充分性. 证毕.

在证明过程中,注意到式(8)中 V_3 没有限制. 可取 $V_3>0$. 直接有

定理 2. 广义系统(1)渐近稳定的充要条件是 Lyapunov 方程(4)对于任给的 $W>0$ 有解 $V>0$.

除了解 V 的唯一性而外,这一结论与著名的 Lyapunov 稳定性理论一致[3]. 当 E 满秩时,解 V 才唯一.

3 镇定方法

由上一节的分析和结论,定义广义系统(1)的 Riccati 方程为

$$(E^{h+1})^T V E^h A + A^T (E^h)^T V E^{h+1} - (E^{h+1})^T V E^h B R^{-1} B^T (E^h)^T V E^{h+1} + (E^{h+1})^T W E^{h+1} = 0, \tag{8}$$

其中 $R>0$，$R\in R^{m\times m}$. 将式(8)改写为

$$(E^{h+1})^T V E^h (A - BR^{-1}B^T (E^h)^T V E^{h+1}) + (A - BR^{-1}B^T (E^h)^T V E^{h+1})^T (E^h)^T V E^{h+1} = -(E^{h+1})^T (W + VE^h BR^{-1}B^T (E^h)^T V) E^{h+1}. \tag{9}$$

容易想到,广义系统(1)在广义状态反馈

$$\boldsymbol{u} = -R^{-1}B^T (E^h)^T V E^{h+1} \boldsymbol{x}, \tag{10}$$

作用下的闭环广义系统为

$$E\dot{\boldsymbol{x}} = (A - BR^{-1}B^T (E^h)^T V E^{h+1}) \boldsymbol{x}. \tag{11}$$

这时,它不再具有广义系统(1)中矩阵可交换的性质. 注意到闭环广义系统(11)可分解为

$$\begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 R^{-1} B_1^T (E_1^h)^T V_1 E_1^{h+1} & 0 \\ -B_2 R^{-1} B_1^T (E_1^h)^T V_1 E_1^{h+1} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

这里用到了式(7b). 易见,广义系统(1)在广义状态反馈(10)的作用下,所得到的闭环广义系统(11)正则性不变. 同时看到,闭环广义系统(11)的渐近稳定性由广义系统(1)的 R——能稳定性决定. 易证

引理 3. 广义系统(1)R——能稳的充要条件是(E_1, A_1, B_1)能稳.

将 Riccati 方程(8)对应地写成

$$(E_1^{h+1})^T V_1 E_1^h A_1 + A_1^T (E_1^h)^T V_1 E_1^{h+1} - (E_1^{h+1})^T V_1 E_1^h B_1 R^{-1} B_1^T (E_1^h)^T V_1 E_1^{h+1} \\ (E_1^{h+1})^T W_1 E_1^{h+1} = 0, \tag{13a}$$

$$V_2 E_2^h A_2 = 0. \tag{13b}$$

注意到 E_1 可逆，知式(13a)实际上表示一个正常系统的 Riccati 方程. 则由引理 3 可证出

定理 3. 如果广义系统(1)R——能稳,则当 $W>0$ 时,Riccati 方程(8)有解 $V>0$.

进一步 当 Riccati 方程(8)成立时,对应的式(9)可写成

$$(E_1^{h+1})^T V_1 E_1^h (A_1 - B_1 R^{-1} B_1^T (E_1^h)^T V_1 E_1^{h+1}) + (A_1 - B_1 R^{-1} B_1^T (E_1^h)^T V_1 E_1^{h+1})^T (E_1^h)^T V_1 E_1^{h+1} = -(E_1^{h+1})^T (W_1 + V_1 E_1^h B_1 R^{-1} B_1^T (E_1^h)^T V_1) E_1^{h+1}, \tag{14a}$$

$$V_2 E_2^h = 0. \tag{14b}$$

由此可得

定理 4. 如果 Riccati 方程(8)对于给定的 $W>0$ 有解 $V>0$，则广义系统(1)在广义状态反馈(10)作用下得到的闭环广义系统(11)渐近稳定.

综合定理 3 和定理 4,直接有

推论 1. 如果广义系统(1)R——能稳,则它可由广义状态反馈(10)镇定.

如果进一步考虑消除广义系统(1)的脉冲行为,则要求该系统脉冲能控. 这时,可先消除系统的脉冲行为,再考虑镇定问题. 具体做法可参阅文献[4].

应指出,广义系统(1)并不能由广义状态反馈(10)消除脉冲行为. 这一点由[5]

$$\mathrm{rank}[E\ AS_E] = \mathrm{rank}[E\ (A - BR^{-1}B^T(E^h)^T VE^{h+1})S_E] \tag{15}$$

易知,这里‘S_E’表示矩阵 E 的右零化矩阵.

参　考　文　献

1 张庆灵. 广义大系统的分散控制与鲁棒控制. 西安:西北工业大学出版社,1997

2 张庆灵. 广义系统结构稳定性判别的李亚普诺夫方法. 系统科学与数学, 1994,**14**(2):117－120

3 黄琳. 稳定性理论. 北京:北京大学出版社,1992

4 张庆灵. 广义交联系统的鲁棒分散控制. 控制与决策, 1995,**10**(1):70－74

5 Zhang Q L. Algebraic characterizations of fixed modes in linear decentralized descriptor systems. In: Proc of IEEE CDC, USA, 1989. 866－871

ASYMPTOTICAL STABILITY AND STABILIZATION OF DESCRIPTOR SYSTEMS

ZHANG QINGLING　　DAI GUANZHONG

(Northwestern Polytechnical University, Xian 710072)

JAMES LAM　　LI QIAN ZHANG

(The University of Hong Kong, Hong Kong)

M. DE LA SEN

(University Del Pais Vasco, Spain)

Abstract In this paper, the problems of asymptotical stability and stabilization of descriptor systems are investigated via Lyapunov methods. Conditions for the asymptotical stability are obtained. Also, a stabilizing method is provided.

Key words Descriptor systems, stability, lyapunov method